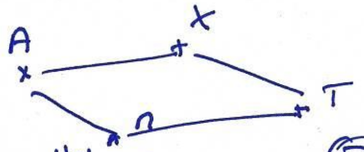
Exercice 1 (1)

(1) $\vec{AX} = \vec{\Pi T}$



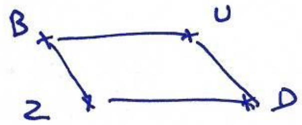
a) $AX\Pi T$ n'est pas un parallélogramme (F)

b) $AXT\Pi$ est un parallélogramme (V)

c) $\vec{XA} = \vec{T\Pi}$ est vrai (V)

car $\vec{AX} = \vec{\Pi T}$, donc $-\vec{AX} = -\vec{\Pi T}$, donc $\vec{XA} = \vec{T\Pi}$.

(2)



a) $\vec{BU} + \vec{BZ} = \vec{BU} + \vec{UD} = \vec{BD}$ (V)

b) $\vec{BZ} + \vec{DU} = \vec{BZ} + \vec{ZB} = \vec{0}$ (V)

c) $\vec{BU} + \vec{ZD} = \vec{BU} + \vec{BU} = 2\vec{BU} \neq \vec{0}$ (F)

(3) $A(-5, 0)$ $B(1, 2)$ et $C(4, 3)$

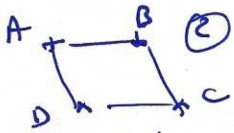
a) $\vec{AB} = (6, 2)$ $\vec{AC} = (9, 3)$

on voit que $\vec{AC} = 3/2\ \vec{AB}$, donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires (V)

b) $\vec{BA} = (-6, -2)$ $\vec{BC} = (3, 1)$

$-2\vec{BC} = (-2\times 3\ ;\ -2\times 1) = (-6\ ;\ -2) = \vec{BA}$ (V)

c) $\frac{3}{2}\vec{AC} = \frac{3}{2}\times(9\ ;\ 3) = \left(\frac{27}{2}\ ;\ \frac{9}{2}\right) \neq \vec{AB}$ (F)

Exercice 2 

(2)

$A(1\,;4)$ $B(-1\,;-1)$ $C(5\,;0)$ $M\left(\frac{7}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$

K milieu de [AB] et D tel que ABCD soit un parallélogramme.

① $K\begin{pmatrix}(1-1)/2\\(4-1)/2\end{pmatrix} = \left(0\,;3/2\right)$

② Pour que A, M et C soient alignés, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{7}{3}-1\,;\frac{8}{3}-4\right) = \left(\frac{4}{3}\,;-\frac{4}{3}\right)$

$\overrightarrow{AC} = \left(5-1\,;0-4\right) = \left(4\,;-4\right)$

On voit que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, donc les points A, M et C sont alignés.

③ ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

On suppose que D a pour coordonnées $(x\,;y)$

Donc $\left(1-(-1)\,;4-(-1)\right) = \left(x-5\,;y-0\right)$

Donc $\begin{cases}x-5=2\\y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\y=5\end{cases}$ Donc $D=(7\,;5)$.

④ $\overrightarrow{KM} = \left(7/3-0\,;8/3-3/2\right) = \left(7/3\,;\frac{16-9}{6}\right) = \left(7/3\,;7/6\right)$

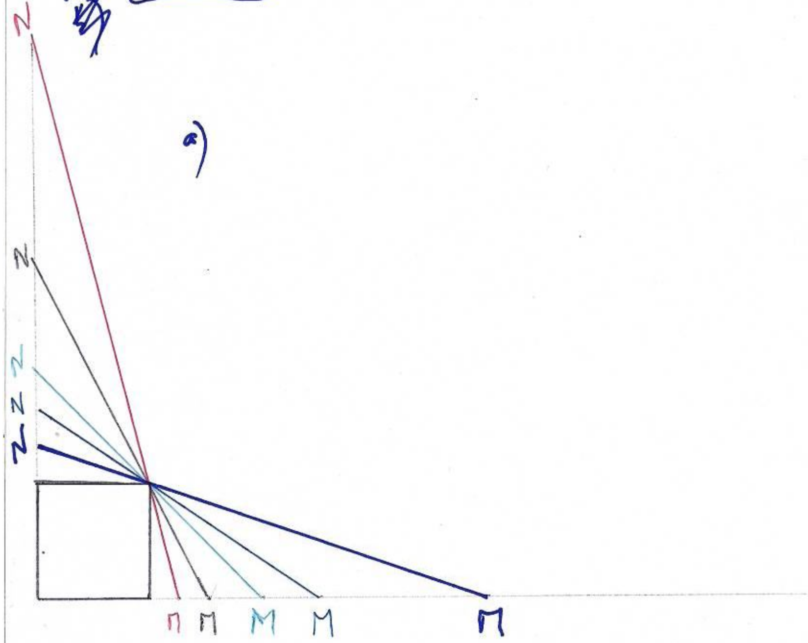
$\overrightarrow{KD} = \left(7-0\,;5-3/2\right) = \left(7\,;7/2\right)$

On voit que $\overrightarrow{KD} = 3\overrightarrow{KM}$, donc $\overrightarrow{KD}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires.
Donc les points K, M et D sont alignés.

⑤ K est le milieu du segment [AB] et $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KD}$, donc M est le centre de gravité du triangle ABD.

A) Exercice 3

1) a)



b)

IM	0,5	1	2	3	6
ON	10	6	4	3,4	2,7

2) a) x ne peut pas être égal à 0 et ne peut pas être négatif.
Donc $x > 0$, donc $x \in]0 ; +\infty[$.

b) plus x est grand, plus ON est petit, donc la fonction L semble être décroissante.

B) 1) a) D'après Thalès ou Pythagore, $\frac{ON}{OM} = \frac{AI}{IM}$

Donc $\frac{L(x)}{2+x} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow L(x) = \frac{2(2+x)}{x} = \frac{4+2x}{x} = \frac{4}{x} + 2$

b) $L(0,5) = \frac{4}{0,5} + 2 = 8+2 = 10$; $L(1) = \frac{4}{1} + 2 = 4+2 = 6$

$L(2) = \frac{4}{2} + 2 = 2+2 = 4$; $L(3) = \frac{4}{3} + 2 = 1,33+2 = 3,33$

$L(6) = \frac{4}{6} + 2 = 0,66+2 = 2,66$

2) La fonction $1/x$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc la fonction $\frac{4}{x}$ l'est aussi, donc $\frac{4}{x} + 2$ aussi, donc $L(x)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$

Exercice 4

④

① $\mathcal{A}(MBZ) = \frac{1}{2}(MB) \times AM = \frac{1}{2}(8-x) \times x = \left(4 - \frac{x}{2}\right)x$

$= -\frac{x^2}{2} + 4x = -0,5x^2 + 4x.$

② $\mathcal{A}(MBZ) = \mathcal{A}(\text{carré}(AM))$

$\Leftrightarrow -0,5x^2 + 4x = x^2 \Leftrightarrow 4x - 1,5x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(4 - 1,5x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $4 - 1,5x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{4}{1,5} = \underline{\underline{2,67 \text{ cm}}}$

Donc les 2 aires sont égales ssi $x = \frac{4}{1,5}$

③ Aire du Triangle $= -0,5x^2 + 4x = -0,5(x^2 - 8x)$

$= -0,5(x^2 - 8x + 16 - 16) = -0,5((x-4)^2 - 16)$

Donc $\mathcal{A} = -0,5(x-4)^2 + 8$

D'après le cours, la parabole est maximale pour $x = 4$

Donc $\mathcal{A}$ maximale $= 8 \text{ cm}^2$.

④ $\mathcal{A}_{\text{Triangle}} > \mathcal{A}_{\text{carré}} \Leftrightarrow -0,5x^2 + 4x > x^2$

$\Leftrightarrow 1,5x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x(1,5x - 4) < 0 \Leftrightarrow (1,5x - 4) < 0$

(car $x > 0$), donc $\underline{x < \frac{4}{1,5}}$

Donc l'Aire du triangle est plus grande que l'Aire du Carré

si $\underline{\underline{0 < x < \frac{4}{1,5}}}$

Exercices

1 a) $I'H = I'O + OH$

$= 1 + OM \times \cos \pi/4$

$= 1 + 1 \times 1/\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$

b) D'après le Théorème de Pythagore, $(I'M)^2 = I'H^2 + MH^2$

Donc $(I'M)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + (OM \times \sin(\pi/4))^2$

$= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} + (1/\sqrt{2})^2 = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} + \frac{1}{2}$

Donc $(I'M)^2 = \frac{1+2+2\sqrt{2}+1}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$

Donc $(I'M) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

2 $I'OM$ est un triangle isocèle car $OI' = OM$

Donc $\widehat{OMI'} = \widehat{MI'O}$

D'autre part $\widehat{OMI'} + \widehat{MI'O} + \widehat{I'OM} = 180° = \pi$

$\widehat{I'OM} = \frac{\pi}{2} + \pi/4 = \frac{3\pi}{4}$, donc $\widehat{OMI'} + \widehat{MI'O} = 2\,\widehat{OMI'}$

$= \pi - 3\frac{\pi}{4} = \pi/4$

Donc $\widehat{OMI'} = \frac{\pi}{4 \times 2} = \frac{\pi}{8} = \widehat{MI'O}$

$\widehat{MI'I} = \widehat{MI'O} = \pi/8$

Donc $\cos(\pi/8) = \frac{I'H}{I'M} = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$= \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}$

et

$\sin(\pi/8) = \frac{HM}{I'M} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}$