

Une fonction est paire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$

Une fonction est impaire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$

Une fonction f est périodique de période $a \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = f(x)$.

1) $f(x) = x^2 - 3$

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x), \text{ donc } \underline{\underline{f \text{ est PAIRE}}}$$

2) $g(x) = \frac{1}{x^3}$

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{-x^3} = -\frac{1}{x^3} = -g(x), \text{ donc } \underline{\underline{g \text{ est IMPAIRE}}}$$

3) $h(x) = -x^2 - x$

$$h(-x) = -(-x)^2 - (-x) = -x^2 + x$$

$$h(-x) \neq h(x) \text{ et } h(-x) \neq -h(x), \text{ donc } \underline{\underline{h \text{ n'est ni PAIRE ni IMPAIRE}}}$$

4) $i(x) = \cos(3x)$

$$i(-x) = \cos(3(-x)) = \cos(-3x) = \cos(3x) = i(x), \text{ donc } \underline{\underline{i \text{ est paire}}}$$

cherchons a tel que $i(x+a) = i(x)$

$$i(x+a) = i(x) \Leftrightarrow \cos(3x+3a) = \cos(3x) \Rightarrow 3x+3a = 3x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 3a = 2k\pi \Rightarrow a = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow \underline{\underline{i \text{ est périodique de période } \frac{2\pi}{3}}}$$

5) $j(x) = -\sin(x) + x$

$$j(-x) = -\sin(-x) + (-x) = \sin(x) - x = -j(x)$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{j \text{ est IMPAIRE}}}$$