1) L'ensemble des nombres complexes z qui vérifient $|1+iz| = |1-iz|$ est $\mathbb{R}$

(1)

2) (a) $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ (E)

on suppose ~~$\exists$~~ $z_1 = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ complexe de module ρ et d'argument θ. On peut donc poser $z_1 = \rho e^{i\theta}$

Donc (E) $\Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$. (E)

on pose $1+ia = r \times e^{i\beta}$

on a donc (E) $\Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \dfrac{r \times e^{i\beta}}{r \times e^{-i\beta}} \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = e^{2i\beta}$

$\Leftrightarrow \rho^n \times e^{in\theta} = e^{2i\beta} \Leftrightarrow \rho^n = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$

$\Leftrightarrow |z_1| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1+iz}{1-iz}\right| = 1 \Leftrightarrow |1+iz| = |1-iz|$

Et on revient à la question (1).

Donc les complexes z tels que $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ sont des nombres réels.

(b) $\dfrac{1+ia}{1-ia}$?

$1+ia = \sqrt{1+a^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + i\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

Donc $\exists\, \theta$, tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ tel que

$1+ia = \sqrt{1+a^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{1+a^2}\; e^{i\theta}$

Donc si $\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ et $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ ②

alors $\tan(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{a}{1} = a$, donc $\tan(\theta) = a$, donc

$$\theta = \mathrm{Arctan}(a)$$

Donc on peut écrire que $1+ia = \sqrt{1+a^2} \times e^{i\,\mathrm{Arctan}(a)}$

Par ailleurs $1-ia = \sqrt{1+a^2} \times e^{-i\,\mathrm{Arctan}(a)}$

Donc $$\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{\sqrt{1+a^2}\; e^{i\,\mathrm{Arctan}(a)}}{\sqrt{1+a^2}\; e^{-i\,\mathrm{Arctan}(a)}} = \underline{\underline{e^{2i\,\mathrm{Arctan}(a)}}}$$

Même demonstration pour $\dfrac{1+iz}{1-iz}$

(c) $$(E) \iff \left(e^{2i\,\mathrm{Arctan}(z)}\right)^n = e^{2i\,\mathrm{Arctan}(a)}$$

$$\iff e^{2in\,\mathrm{Arctan}(z)} = e^{2i\,\mathrm{Arctan}(a)}$$

$$\iff 2n\,\mathrm{Arctan}(z) = 2\,\mathrm{Arctan}(a)$$

$$\iff n\,\mathrm{Arctan}(z) = \mathrm{Arctan}(a)$$

$$\iff \mathrm{Arctan}(z) = \frac{\mathrm{Arctan}(a)}{n}$$

$$\iff \tan(\mathrm{Arctan}(z)) = \tan\left(\frac{\mathrm{Arctan}(a)}{n} + k\pi\right) \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

$$\iff z = \tan\left(\frac{\mathrm{Arctan}(a)}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) \text{ avec } k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$