$$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$u_0 = 1$$

1) Montrons que $u_n = 2^n + n$

Faisons cette démonstration par récurrence.

au rang 0 : $2^0 + 0 = 1 = u_0$ donc OK.

Supposons que $u_n = 2^n + n$, Montrons que $u_{n+1} = 2^{n+1} + (n+1)$

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n = 2(2^n + n) + 1 - n$$
$$= 2^{n+1} + 2n + 1 - n$$
$$= 2^{n+1} + n + 1 \qquad \text{cqfd}$$

Donc $u_n = 2^n + n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

2) $S_n = \sum_0^n u_k = \sum_0^n 2^k + k$

On peut écrire que $u_n = g_n + a_n$ avec $g_n = 2^n$ et $a_n = n$

On sait que la suite $g_n = 2^n$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2

et que $a_n = n$ est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.

$$S_n = \sum_0^n (g_k + a_k) = \sum_0^n g_k + \sum_0^n a_k$$
$$= \left(1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2}\right) + (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)$$
$$= 2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

3) $S(15) = 2^{16} - 1 - \frac{15 \times 16}{2} = 65415$