Montrer que $\displaystyle\sum_{0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (1)

Par récurrence :

Pour $n=0$ $\quad 0=0$ (Donc OK).

Supposons que (1) est vrai au rang n.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\sum_{0}^{n+1} k^3 = \sum_{0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right]$$

$$= (n+1)^2 + \frac{1}{4}(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \quad \text{cqfd.}$$

Donc $\displaystyle\sum_{0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$