Considérons le polynôme $\varphi(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

Deux polynômes sont identiques si leurs coefficients de rang n sont égaux 2 à 2.

Donc $P(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-a=2 \\ c-b=-3 \\ -c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=1 \\ b=4 \end{cases}$

$P(x) = 2x^3+2x^2-3x-1$

Donc on peut écrire $P(x) = (x-1)(2x^2+4x+1)$

$P(x) < 0$

Etudions les racines de $2x^2+4x+1 = A(x)$

$\Delta = 4^2 - 4\times 2 = 16-8 = 8 > 0$

Donc les racines de $A(x)$ sont $\frac{-4+\sqrt{8}}{4} = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$

$= -1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $P(x) = 2(x-1)(x+1-1/\sqrt{2})(x+1+1/\sqrt{2})$

x	$-\infty$	$-1-1/\sqrt{2}$		$-1+1/\sqrt{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1-1/\sqrt{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1+1/\sqrt{2}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $S = \left]-\infty ; -1-1/\sqrt{2}\right[\cup \left]-1+1/\sqrt{2} ; 1\right[$