$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}}$ et $v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u}\, du$ ①

$\forall n \geq 1$ et $t \in]0,1[$

1°) a) $1+t+t^2+t^3+\dots+t^{n-1}$ est la somme des termes d'une suite géométrique.

de raison t et de premier terme 1

$q_n = (t)^n$, donc $1+t+\dots+t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$

Donc $\frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} = \frac{1-t}{1-t^n}$

Donc $\frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{1-t}{1-t^n} - (1-t) = (1-t)\left(\frac{1}{1-t^n} - 1\right)$

$= (1-t)\left(\frac{1-1+t^n}{1-t^n}\right) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}$ cqfd.

on a donc $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+\dots+t^{n-1}} = \int_0^1 (1-t)\,dt + \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,dt$

$\int_0^1 (1-t)\,dt = \left[t - t^2/2\right]_0^1 = 1/2$

et comme $t>0$, alors $1+t+\dots+t^{n-1} \geq 1$, on a donc $0 \leq R_n \leq \int_0^1 t^n dt$.

$\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$

Donc $\forall n \geq 1$; $0 \leq u_n - 1/2 \leq \frac{1}{n+1}$

Donc par le théorème des gendarmes $\lim_{+\infty} u_n - 1/2 = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} u_n = 1/2$.

b) le changement de variable $u = t^n$ implique que $t = u^{1/n}$, c'est un changement de variable de classe C^1 et croissant sur $[\alpha^n, 1]$ d'image $[\alpha, 1]$

~~Tel~~ donc $dt = \frac{1}{n} u^{1/n - 1}\, du$.

Donc $A = \int_\alpha^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,dt = \int_{\alpha^n}^1 \frac{(1-u^{1/n})u}{1-u} \times \frac{1}{n} u^{1/n - 1}$

$$A = \frac{1}{n}\int_{\alpha^n}^{1} \frac{(1-u^{1/n})\,u^{1/n}}{1-u}\,du$$

qd α tend vers 0, on a $B = \lim_{\alpha\to 0} A = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{(1-u^{1/n})\,u^{1/n}}{1-u}$

$$B = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}\,du \quad , \text{donc } u_n - 1/2 = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u} = \frac{V_n}{n}$$

2) a) $\forall k \geq 1$, $\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

La limite donc lieu à une forme indéterminée, on peut donc utiliser la règle de l'hopital $\lim_{x\to 1} \frac{f}{g} = \lim_{1} \frac{f'}{g'} = \lim_{1} \frac{k(\ln(x))^{k-1}}{x}$ ~~sra~~

Donc si $k=1$ $\lim_{1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1} = 1$

si $k>1$ $\lim_{1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1} = 0$

b) La fonction $\varphi(x) = \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$ est continue sur $]0,1[$ et $\lim_0 \sqrt{x}(\ln(x))^k = 0$

Donc $\lim_0 \sqrt{x}\varphi(x) = 0$

Donc Par la règle de Riemann $\int_0^{1/2} \varphi(x)\,dx$ est convergente

Donc $\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$ est convergente.

c) $f(x) = e^x - e^{2x}$ $\quad f'(x) = e^x - 2e^{2x}$, $f'(0) = -1$

$f''(x) = e^x - 4e^{2x}$, donc $\forall x \leq 0$ $|f''(x)| = e^x|1-4e^x| \leq |1-4e^x|$

La fonction $g(x) = 1-4e^x$ est décroissante $\lim_{-\infty} g(x) = 1$ et $g(0) = -3$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|g(x)| \leq 3$ et $|f''(x)| \leq 3$

Par la formule de Taylor, on a $|f(x) - f(0) - xf'(0)| \leq \frac{(x-0)^2}{2}\sup_{[x,0]} f''$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^-, \ |e^x - e^{2x} + x| \leq \frac{3}{2}x^2$$