1

1) $A_n = \sum_0^n k^0 = \sum_0^n 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1 \text{ fois}} = (n+1)$

2) $B_n = \sum_0^n k^1 = \sum_0^n k$

B_n est la somme des termes de la suite arithmétique $u_k = k$

Donc $B_n = (n+1) \times \frac{(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1) \times n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

3) a) $C'_n = \sum_0^n (k+1)^2 = \sum_1^{n+1} k^2 = \sum_0^n k^2 + \sum_{n+1}^{n+1} k^2 = C_n + (n+1)^2$

b) $C'_n = \sum_0^n (k+1)^2 = \sum_0^n (k^2+2k+1) = \sum_0^n (k^2+2k^1+k^0)$

$\Leftrightarrow C'_n = \sum_0^n k^2 + 2\sum_0^n k^1 + \sum_0^n k^0$

$\Leftrightarrow C'_n = C_n + 2B_n + A_n$

c) $C'_n = C_n + (n+1)^2 = C_n + 2B_n + A_n$

Donc $C_n + (n+1)^2 = C_n + 2B_n + A_n \Leftrightarrow 2B_n = (n+1)^2 - A_n$

$\Leftrightarrow B_n = \frac{(n+1)^2 - A_n}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

4) $D'_n = \sum_0^{n} (k+1)^3 = \sum_0^{n+1} (k)^3 = \sum_0^n (k)^3 + \sum_{n+1}^{n+1} k^3 = D_n + (n+1)^3$

D'autre part $D'_n = \sum_0^n (k+1)^3 = \sum_0^n (k^3+3k^2+3k+1)$

Donc $D'_n = \sum_0^n k^3 + 3\sum_0^n k^2 + 3\sum_0^n k^1 + \sum_0^n k^0$

Donc $D'_n = D_n + 3C_n + 3B_n + A_n$

On peut donc dire que $D_n + 3C_n + 3B_n + A_n = D_n + (n+1)^3$

$\Leftrightarrow C_n = \frac{(n+1)^3 - 3B_n - A_n}{3} = \frac{(n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)}{3}$

Donc $C_n = \dfrac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6}$

$\Leftrightarrow C_n = \dfrac{(n+1)\left(2(n+1)^2 - 3n - 2\right)}{6}$

$\Leftrightarrow C_n = \dfrac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5) De la même façon, on pose $E'_n = \sum_0^n (k+1)^4 = E_n + (n+1)^4$

avec $E_n = \sum_0^n k^4$

Donc $E'_n = \sum_0^n (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$

$= \sum_0^n k^4 + 4\sum_0^n k^3 + 6\sum_0^n k^2 + 4\sum_0^n k + \sum_0^n 1$

$= E_n + 4D_n + 6C_n + 4B_n + A_n.$

Donc $E_n + 4D_n + 6C_n + 4B_n + A_n = E_n + (n+1)^4$

$\Leftrightarrow 4D_n = (n+1)^4 - 6C_n - 4B_n - A_n$

$\Leftrightarrow D_n = \dfrac{(n+1)^4 - 6C_n - 4B_n - A_n}{4}$

Donc $D_n = \dfrac{(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)}{4}$

$\Leftrightarrow D_n = \dfrac{(n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right]}{4}$

$\Leftrightarrow D_n = \dfrac{(n+1)\left[n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1\right]}{4}$

$\Leftrightarrow D_n = \dfrac{(n+1)(n^3+n^2)}{4} = \dfrac{n^2(n+1)(n+1)}{4} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$