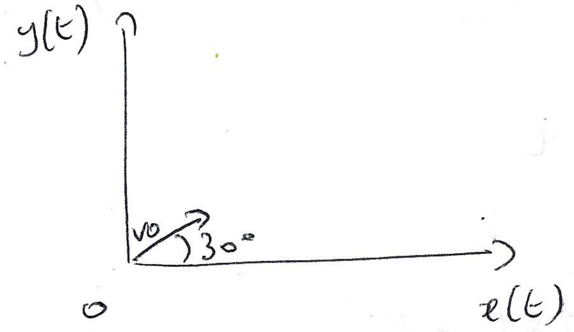
1) Sans force de frottement



$V_0 = 108$ km/h $= 30$ m/s

$\alpha = 30°$

$m = 5$ kg

$g = 9,8$

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (La somme des forces qui s'appliquent à un solide est égale à la masse de ce solide $\times$ son accélération)

Il n'y a pas de frottement, donc seul le poids du solide intervient :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$\vec{a}$ est l'accélération du solide $= \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$

Donc on a $\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \alpha \\ \dot{y} = -gt + \beta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha t + \alpha_2 \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + \beta t + \beta_2 \end{cases}$

à $t=0$ $\quad x=0$, $y=0$ $\quad$ Donc $\alpha_2 = \beta_2 = 0$

$V = V_0$ Donc $\dot{x} = V_0 \cos 30°$
$\dot{y} = V_0 \sin 30°$

Donc $\alpha = V_0 \cos 30°$
$\beta = V_0 \sin 30°$.

Donc $x(t) = V_0 \cos 30° \, t = 26\,t$
$y(t) = -4,9t^2 + V_0 \sin(30)\,t = -4,9t^2 + 15t$

La portée du solide est atteinte quand $y=0$, donc $-4,9t^2 + 15t = 0$

$\Leftrightarrow$ $t = \underline{3,06}$ s

quand $t = 3,06$ s, $x(t) = 26 \times 3,06 = \underline{\underline{79,56 \text{ m}}}$

La hauteur maximale est atteinte quand $\dot{y} = 0$ Donc quand $t = \dfrac{\cancel{6,8}\ 15}{\cancel{4,9}\ 9,8} = \underline{\underline{1,53 \text{ s}}}$

La hauteur maximale atteinte est donc :

$$y = -4{,}9 \times (1{,}53)^2 + 15 \times (1{,}53) = \underline{\underline{11{,}48 \text{ m}}}.$$

2) Avec force de frottement

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} + 0{,}2\,\vec{V} = m\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}2\,\dot{x} \\ -0{,}2\,\dot{y} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}2\,\dot{x} = 5\,\ddot{x} \\ -49 - 0{,}2\,\dot{y} = 5\,\ddot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} + 25\,\ddot{x} = 0 \\ 245 + \dot{y} + 25\,\ddot{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\dot{x}}{25} \\ \ddot{y} = -\dfrac{\dot{y}}{25} - \dfrac{245}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \lambda e^{-t/25} \\ \dot{y} = \lambda e^{-t/25} - 245 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = V_0 \cos(30°)\, e^{-t/25} \\ \dot{y} = (V_0 \sin(30°) + 245)\, e^{-t/25} - 245 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 26\, e^{-t/25} \\ \dot{y} = +260\, e^{-t/25} - 245 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -650\, e^{-t/25} + x_0 \\ y = -6500\, e^{-t/25} - 245\,t + y_0 \end{cases}$$

or $t = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, donc $x_0 = 650$
$y_0 = +6500$

Donc $x = 650\,(1 - e^{-t/25})$

$y = 6500\,(-e^{-t/25} + 1) - 245\,t$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 650\,(1 - e^{-t/25}) \\ y &= 6500\,(1 - e^{-t/25}) - 245\,t \end{aligned}}$$