Exercice 1 $n \in \mathbb{Z}$, on note $A_n = n^5 - 5n^3 + 4n$ 

1) $A_n = n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4)$

$= n(n^2-1)(n^2-4)$

$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$

Donc $A_n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

2) $A_n$ est le produit de cinq entiers relatifs consécutifs.

Donc obligatoirement, parmi ces 5 entiers relatifs, au moins 1 est pair donc divisible par 2, au moins 1 est divisible par 3, au moins 1 est divisible par 4 et au moins 1 est divisible par 5.

Donc 2, 3, 4 et 5 divisent $A_n$.

3) 2 et 4 divisent $A_n$, donc $2\times4=8$ divise $A_n$ pour tout $n$

2 et 5 divisent $A_n$, donc $2\times5=10$ divise $A_n$ "

3 et 4 divisent $A_n$, donc $3\times4=12$ divise $A_n$ "

4 et 5 divisent $A_n$, donc $4\times5=20$ divise $A_n$ "

2, 4 et 5 divisent $A_n$, donc $2\times4\times5=40$ divise $A_n$ "

3, 4 et 5 divisent $A_n$, donc $3\times4\times5=60$ divise $A_n$ "

2, 3, 4 et 5 divisent $A_n$, donc $2\times3\times4\times5=120$ divise $A_n$ "

Pour 9, 16, 80 et 100 il faut établir des Tableaux des résidus modulo.

Divisibilité par 9 (Tableau des résidus modulo 9 de $A_n$)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n-2$ | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $n-1$ | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $n+1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 |
| $n+2$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 |
| $A_n$ | 4 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 |