Exercice 2 | $a, b \in \mathbb{N}$

1) a divise b

a divise b donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ka$

Donc $2^b - 1 = 2^{ka} - 1$

si l'on remarque que la ~~suite~~ somme des k premiers termes de la suite géométrique (2^n) (avec $n \geq 0$) est $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$, alors on peut remarquer également que la somme des k premiers termes de la suite géométrique $(2^a)^n$ (avec $n \geq 0$) est :

$$1 + 2^a + (2^a)^2 + \dots + (2^a)^{k-1} = \frac{1-2^{ka}}{1-2^a} = \frac{2^{ka}-1}{2^a-1} = \frac{2^b-1}{2^a-1}.$$

Donc il existe un entier $n = 1 + 2^a + (2^a)^2 + \dots + (2^a)^{k-1}$ tel que

$\frac{2^b-1}{2^a-1} = n$, donc $2^b - 1$ est divisible par $2^a - 1$

2) a ne divise pas b, donc il existe k et $r \in \mathbb{N}$ tels que

$b = ka + r$ (avec $0 < r < a$) et ($r \neq 0$)

Donc $2^b = 2^{ka+r} - 1$

$$\frac{2^b-1}{2^a-1} = \frac{2^{ka+r}-1}{2^a-1} = \frac{2^{ka+r} - 2^r + 2^r - 1}{2^a-1}$$

$$= \frac{2^{ka+r}-2^r}{2^a-1} + \frac{2^r-1}{2^a-1} = \underbrace{\frac{2^r(2^{ka}-1)}{2^a-1}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{2^r-1}{2^a-1}}_{\beta}$$

On a vu dans la première question que $\alpha \in \mathbb{N}$

$r < a$, donc $2^r < 2^a$, donc $2^r - 1 < 2^a - 1$, donc $\beta \notin \mathbb{N}$

Donc $\frac{2^b-1}{2^a-1} \notin \mathbb{N}$, donc $2^a - 1$ ne divise pas $2^b - 1$