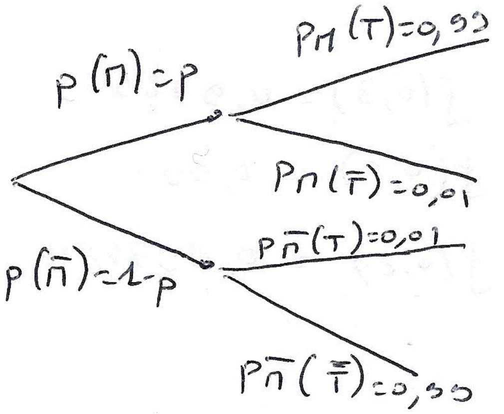
1) La probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99.
Autrement dit, la probabilité de T sachant M est égale à 0,99

Donc $\boxed{P_M(T) = 0{,}99}$

La probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est 0,99
Donc, la probabilité de $\overline{T}$ sachant $\overline{M}$ est égale à 0,99

Donc $\boxed{P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}99}$

2) a)



$p(M \cap T) = 0{,}99\,p$

$P(M \cap \overline{T}) = 0{,}01\,p$

$P(\overline{M} \cap T) = 0{,}01\,(1-p)$

$p(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0{,}99\,(1-p)$

on sait que $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)}$

on sait aussi que $T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$

$$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M}) - p((T \cap M) \cap (T \cap \overline{M}))$$

$$= 0{,}99p + 0{,}01(1-p) - 0$$

Donc $p(T) = 0{,}98\,p + 0{,}01$

Donc $$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}99p}{0{,}98p + 0{,}01} = \frac{99p}{98p+1}$$

$$\boxed{P_T(M) = \frac{99p}{98p+1} = f(p)}$$

2b) $f(p) = \dfrac{99p}{98p+1}$

Etudions la fonction $f(p)$, en particulier ses variations.

Calculons sa dérivée.

$$f'(p) = \frac{99(98p+1) - (98 * 99p)}{(98p+1)^2} = \frac{99}{(98p+1)^2}$$

$\forall p \in [0,1]$, $f'(p) > 0$, donc $f(p)$ est croissante.

c) $f(0{,}001) = 0{,}09016393$ $\quad$ $f(0{,}3) = 0{,}976973$

$f(0{,}01) = 0{,}5$ $\quad$ $f(0{,}5) = 0{,}99$

$f(0{,}1) = 0{,}916666$ $\quad$ $f(0{,}8) = 0{,}9974811$

3) $p = 0{,}7$

$p_T(M) = f(0{,}7) = 0{,}99568966$

$p_T(\bar{M}) = 1 - p_T(M) = 0{,}00431034$

on en déduit que le test est plutôt efficace et se trompe rarement.

4) $p = 0{,}005$

a) $p_T(M) = f(0{,}005) = 0{,}33221477$

b) $p_T(\bar{M}) = 1 - p_T(M) = 0{,}66778523$

Dans ce cas, le test n'est pas efficace et peu fiable, ~~il ne détecte que 33 % des~~ car il se trompe dans 66 % des cas.