a) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ (sur $[0;+\infty[$)

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)} = -1$

$f(x) = m \iff \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = m \iff (2-\sqrt{x}) = m(2+\sqrt{x})$

$\iff 2-\sqrt{x} = 2m + m\sqrt{x} \iff \sqrt{x}(m+1) = 2-2m$

$\iff \sqrt{x} = \dfrac{2-2m}{m+1}$ $\sqrt{x}$ est positif, donc il faut que $\dfrac{2-2m}{m+1} \geq 0$

$\iff \dfrac{1-m}{1+m} \geq 0$, Donc il faut que $x \in]-1, 1]$.

b) Etudions les variations de la fonction $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Donc si $x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ $g'(x) \geq 0$, g est croissante

et si $x \in [0; 2]$, $g'(x) \geq 0$, g est décroissante

$g(0) = 1$ et $g(2) = -3$

Donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe une valeur $\alpha_1 \in]-\infty, 1]$ telle que $g(\alpha_1) = 0$; une valeur $\alpha_2 \in [0, 2]$ telle que $g(\alpha_2) = 0$ et une valeur $\alpha_3 \in [2; +\infty[$ telle que $g(\alpha_3) = 0$

$\alpha_1 \simeq -0,53$ $\alpha_2 \simeq 0,65$ $\alpha_3 \simeq 2,88$

c) Etudions les variations de la fonction $h(x) = x - \cos x$.

$h'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$, donc h est croissante

$\lim_{-\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} h(x) = +\infty$, donc il existe une valeur unique a telle que $h(a) = 0$ $a \simeq 0,74$

d) $|x^3 - 12x| = 1 \iff x^3 - 12x = 1$ ou $x^3 - 12x = -1$

Etudions la fonction $j(x) = x^3 - 12x - 1$

$j'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$

$j'(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$, donc j croissante

$j'(x) \leq 0$ si $x \in [-2 ; 2]$, donc j décroissante

$j(0) = -1$ $\quad j(-2) = 15$ $\quad j(2) = -17$

Donc il existe $\beta_1 \in]-\infty ; -2]$; $\beta_2 \in [-2, 2]$ et $\beta_3 \in [2 ; +\infty[$ telles que

$j(\beta_1) = j(\beta_2) = j(\beta_3) = 0$

$\beta_1 \simeq -3,42$ $\quad \beta_2 \simeq -0,09$ $\quad \beta_3 \simeq 3,5$

Etudions la fonction $l(x) = x^3 - 12x + 1$

$l(x)$ a les mêmes variations que $j(x)$

$l(0) = 1$ $\quad l(-2) = 17$ $\quad l(2) = -15$

$\gamma_1 \simeq -3,50$ $\quad \gamma_2 = 0,09$ $\quad \gamma_3 \simeq 3,42$

Il y a donc six solutions