1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y+z \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x+z \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0x + 1y + 1z \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 1x + 0y + 1z \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = 1x + 1y + 0z \end{cases}$

Donc $\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\[1ex] \dfrac{dy}{dt} \\[1ex] \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2) $A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

les valeurs propres $\lambda$ et les vecteurs propres $\vec{u}$ de $A$ vérifient

$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\,\vec{u} = 0$ où $I$ est la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $B = A - \lambda I$. les valeurs propres de $A$ sont telles que $\operatorname{Det}(B) = 0$

$$B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } B = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + 1 + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$= (-\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (-\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$$

Donc $\text{Det } B = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = 2$

Donc les valeurs propres de $A$ sont $-1$ et $2$.

Vecteurs propres pour $\lambda = -1$.

On a donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \end{cases}$ les trois

équations sont équivalentes à $x = -y - z$

Donc les vecteurs propres sont $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{u} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

Vecteurs propres pour $\lambda = 2$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2x \\ x + z = 2y \\ x + y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$

$$\boxed{\text{Donc } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

3) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre associé à la valeur propre 2

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre " " " $-1$

$\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre associé à la valeur propre $-1$.

$B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} = \vec{0}$ signifie que $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

on écrit le système sous forme matricielle, il faut montrer que la matrice est inversible.

$$M\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det} M = 1\begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{vmatrix} = 1+2=3 \neq 0$$

Donc la matrice $M$ est inversible, donc $B_1(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base.

4) $$P\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$P^{-1}AP$ ?

Calculons d'abord $P^{-1}$

$$\operatorname{Det} P = 1\begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$ donc $P$ est inversible.

La matrice des cofacteurs de $P$ est

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\1 & -1 & 2\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

on transpose la matrice obtenue, on a $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

on divise les termes obtenus par le déterminant (4)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$A \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \times AP = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5) $X = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$X = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_1\vec{k} = x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + z_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= (x_1+y_1)\vec{i} + (x_1+z_1)\vec{j} + (x_1-y_1-z_1)\vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dy_1}{dt}\\ \frac{dz_1}{dt}\end{pmatrix}$

6) $(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow P\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dy_1}{dt}\\ \frac{dz_1}{dt}\end{pmatrix} = AP\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}dx_1/dt\\ dy_1/dt\\ dz_1/dt\end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} : (E_1)$ cqfd.

on a donc (5)

$$\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dy_1}{dt}\\ \frac{dz_1}{dt}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = -y_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = -z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha e^{2t} \\ y_1 = \beta e^{-t} \\ z_1 = \gamma e^{-t} \end{cases}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, donc

$$x = \alpha e^{2t} + \beta e^{-t}$$
$$y = \alpha e^{2t} + \gamma e^{-t}$$
$$z = \alpha e^{2t} - \beta e^{-t} - \gamma e^{-t}$$

$x(0)=0 \Rightarrow \alpha+\beta=0$

$y(0)=0 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=0$

$z(0)=3 \Leftrightarrow \alpha-\beta-\gamma=3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\alpha \\ \gamma=-\alpha \\ \alpha+\alpha+\alpha=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-1 \\ \gamma=-1 \end{cases}$$

Donc
$$\boxed{\begin{cases} x = e^{2t} - e^{-t} \\ y = e^{2t} - e^{-t} \\ z = e^{2t} + e^{-t} + e^{-t} = e^{2t} + 2e^{-t} \end{cases}}$$