Exercice 1 $f(x) = x^2 - 2x + m$

1) $m = -5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 5$

on calcule le discriminant $\Delta = (-2)^2 + 4 \times 5 = 24$

Donc les racines de $f(x)$ sont $\frac{2+\sqrt{24}}{2} = 1+\sqrt{6}$ et $1-\sqrt{6}$

$$\boxed{\text{Donc } f(x) = (x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})}$$

2) $m = -5$ $\frac{f(x)}{4-x} \leq 0 \Leftrightarrow A(x) = \frac{(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})}{4-x} \leq 0$

on fait un tableau de signes

x	$-\infty$		$1-\sqrt{6}$		$1+\sqrt{6}$		4		$+\infty$
$x-1-\sqrt{6}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1+\sqrt{6}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$		$-$		$+$	$\|$	$-$	

Donc les solutions sont $\boxed{S = [1-\sqrt{6} ; 1+\sqrt{6}] \cup]4 ; +\infty[}$

3) Soit M ce point $M \in C_f \cap (\text{Axe des abscisses}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$ ne doit admettre qu'une seule solution, donc le discriminant du trinôme $x^2 - 2x + m$ doit être égal à 0.

$\Delta = 4 - 4m = 4(1-m)$; $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Si $m = 1$ $x_1 = 1$

$$\boxed{\text{Donc } m = 1 \text{ et le point a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

4) Pour connaître le minimum de f, il faut mettre $f(x)$ sous forme canonique.

$f(x) = x^2 - 2x + m = (x-1)^2 - 1 + m$

Donc le minimum de f est atteint quand $x = 1$, donc il faut que

$f(1) = 3 \Rightarrow -1 + m = 3 \Rightarrow \underline{\underline{m = 4}}$

5) $A(2;5) \in C_f \Leftrightarrow f(2)=5 \Leftrightarrow 2^2-(2+2)+m=5$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{m=5}}$

6) $M\binom{x}{y} \in C_f \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ y=x^2-2x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x^2-2x+m=x-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x^2-3x+(m+2)=0 \quad (E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ \text{le discriminant de } x^2-3x+(m+2) \text{ doit être égal à 0} \end{cases}$

$\Delta=(-3)^2-4(m+2)=9-4m-8=1-4m$, le discriminant doit être égal à 0

$\Delta=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{m=1/4}}$

7) Pour que $x^2-2x+m>0$ pour tout réel x, il faut que le discriminant de x^2-2x+m soit négatif.

$\Delta=4-4m=4(1-m)$

$\Delta<0 \Leftrightarrow 1-m<0 \Leftrightarrow \underline{\underline{m>1}} \Leftrightarrow m\in\,]1;+\infty[$

Exercice 2 $\quad g(x)=\dfrac{-5}{4(x-3)}$

1) Pour que g soit définie, il ne faut pas que sa dénominateur soit égal à 0

Donc $4(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow (x-3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$

Donc $\underline{\underline{D_g=\mathbb{R}-\{3\}.}}$

2) g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}-\{3\}$, on peut donc calculer sa dérivée.

$g'(x)=\dfrac{5}{4(x-3)^2}$

on remarque que ~~$g'(x)$~~ $\forall x \in D_g$, $g'(x)>0$, donc la fonction g est croissante (strictement) sur D_g.