$a^2+9=5^n \quad (E)$

a) $5\equiv 2[3]$

$\Rightarrow 5^n \equiv 2^n [3]$

si n est impair $2^n \equiv 2[3]$, donc $5^n \equiv 2[3] = \alpha$

D'autre part

si $a\equiv 0[3]$, alors $a^2\equiv 0[3]$, donc $a^2+9\equiv 0[3] \neq \alpha$

si $a \equiv 1[3]$, alors $a^2\equiv 1[3]$, donc $a^2+9\equiv 1[3] \neq \alpha$

si $a\equiv 2[3]$, alors $a^2\equiv 4[3]\equiv 1[3]$, donc $a^2+9 \equiv 1[3]\neq\alpha$.

Donc si n est impair l'équation (E) est impossible.

b) Si $n=2p$, n est pair

Donc si $5\equiv 2[3]$, alors $5^n\equiv 2^n[3]\equiv 1[3] = \beta$

On a vu dans le a) que si $a\equiv 1[3]$, alors $a^2+9\equiv 1[3]=\beta$

et que si $a\equiv 2[3]$, alors $a^2+9\equiv 1[3] = \beta$.

Donc il existe un a tel que $(a^2+9)\equiv 5^n[3]$