Exercice 1

1) $f(x) = \exp(a+b-x) \cdot \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\exp(x)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que $\exp(a+b-x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\exp(a+b-x) \cdot \exp(x) + \exp(a+b-x) \cdot \exp(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction f est constante, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = f(0) = f(b)$.

$f(0) = \exp(a+b-0) \times \exp(0) = \exp(a+b) \times \exp(0) = \exp(a+b)$

$f(b) = \exp(a+b-b) \times \exp(b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Donc $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\underline{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$.

2) $\exp(a+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp(a) \neq 0$, donc $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = g(x)$$

La seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée est $\exp(x)$ avec $\exp(0) = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \exp(x)$, donc $\exp(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$

Donc $\exp(x) \times \exp(a) = \exp(a+x)$

Donc $\exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$

Donc $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\underline{\underline{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}}$.

Exercice 2)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2x} - 2e^{1-x} + 2e$

1) on pose $X = e^{-x}$

on admet la fonction $g(X) = X^2 - 2e \times X + 2e = X^2 - 2eX + 2e$

on pose $f(x) = g(e^{-x})$

Donc $f'(x) = (e^{-x})' \times g'(e^{-x})$

$g'(X) = 2X - 2e$

Donc $f'(x) = -e^{-x} \times (2e^{-x} - 2e) = 2ee^{-x}(1 - e^{-x-1}) = \underline{\underline{2e^{-x}(e - e^{-x})}}$