• On cherche les valeurs de Π et C telles que $\begin{cases} \alpha \Pi + \beta C = 0 \\ \gamma \Pi + \delta C = 0 \end{cases}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0,02\,\Pi - 0,04\,C = 0 \\ -0,03\,\Pi + 0,03\,C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi = 2C \\ \Pi = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi = 0 \\ C = 0 \end{cases}$ cqfd.

• Cherchons δ tel que $\begin{cases} 0,02\,\Pi - 0,04\,C = 0 \\ -0,03\,\Pi + \delta C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi = 2C \\ \delta = \dfrac{0,03\,\Pi}{C} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Pi}{C} = 2 \\ \dfrac{\Pi}{C} = \dfrac{\delta}{0,03} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\delta}{0,03} = 2 \\ \dfrac{\Pi}{C} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0,06 \\ C(0) = \dfrac{\Pi(0)}{2} = \dfrac{120}{2} = 60. \end{cases}$

Donc $\boxed{C(0) = 60 \quad \text{et} \quad \delta = 0,06}$

• $\dot{\Pi} = 0,02\,\Pi - 0,04\,C$
$\dot{C} = -0,03\,\Pi + 0,03\,C$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\Pi} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 & -0,04 \\ -0,03 & 0,03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ C \end{pmatrix}$

On cherche les valeurs propres $AX = \lambda X$.

$$D = \det \begin{vmatrix} 0,02-\lambda & -0,04 \\ -0,03 & 0,03-\lambda \end{vmatrix} = (0,02-\lambda)(0,03-\lambda) - 12\times 10^{-4}.$$
$$= \lambda^2 - 0,05\lambda - 6\times 10^{-4}$$

$D = 0 \Leftrightarrow 100\lambda^2 - 5\lambda - 0,06 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49$

Donc $\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{5+7}{200} = \frac{12}{200} = \frac{6}{100} \\ \lambda_2 &= \frac{5-7}{200} = \frac{-2}{200} = \frac{-1}{100} \end{aligned}}$

Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont :

$\lambda_1 = \frac{6}{100}$

$$\begin{cases} 0{,}02\,M - 0{,}04\,C = 0{,}06\,M \\ -0{,}03\,M + 0{,}03\,C = 0{,}06\,C \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ M = -C \right.$$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour $\lambda = \frac{6}{100}$.

$\lambda_2 = \frac{-1}{100}$

$$\begin{cases} 0{,}02M - 0{,}04C = -0{,}01M \\ -0{,}03M + 0{,}03C = -0{,}01C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}03M = 0{,}04C \\ -0{,}03M = -0{,}04C \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ M = \frac{4}{3} C \right.$$

Donc $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour $\lambda = -\frac{1}{100}$.

On peut donc écrire

$$M = 4a\, e^{-0{,}01t} + b\, e^{0{,}06t}$$

$$C = 3a\, e^{-0{,}01t} - b\, e^{0{,}06t}$$

On sait que $M(0) = 120$ et $C(0) = 100$

Donc $$\begin{cases} 4a + b = 120 \\ 3a - b = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a = 220 \\ b = 3a - 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{220}{7} \\ b = -\frac{40}{7} \end{cases}$$

Donc $$M = \frac{880}{7} e^{-0{,}01t} - \frac{40}{7} e^{0{,}06t} = \frac{40}{7}\left(22 e^{-0{,}01t} - e^{0{,}06t}\right)$$

$$C = \frac{660}{7} e^{-0{,}01t} + \frac{40}{7} e^{0{,}06t} = \frac{40}{7}\left(16{,}5\, e^{-0{,}01t} + e^{0{,}06t}\right)$$

- le clan M disparaîtra un jour

$$M = 0 \Leftrightarrow 22 e^{-0{,}01t} - e^{0{,}06t} = 0 \Leftrightarrow 0{,}06t = -0{,}01t + \ln 22$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(22)}{0{,}07} \approx 44 \text{ ans.}$$

quand $t = 44$ $$C = \frac{40}{7}\left(16{,}5 \times e^{-0{,}44} + e^{2{,}64}\right).$$