Exercice 39 | $f(x) = (2x^2 - x + 4)^2$ ①

a) $(2x^2-x+4)^2 = (2x^2-x+4)(2x^2-x+4) = 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2x^3 + x^2 - 4x$
$+ 8x^2 - 4x + 16$

$= 4x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 8x + 16$

Donc $f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 8x + 16 \Rightarrow \underline{\underline{f'(x) = 16x^3 - 12x^2 + 34x - 8}}$

b) $f(x) = u^2(x)$

$u(x) = 2x^2 - x + 4$

$f'(x) = (u^2(x))' = 2u(x) \times u'(x) = 2 \times (2x^2-x+4)(4x-1)$
$= \underline{2(4x-1)(2x^2-x+4)}$

c) La méthode la plus rapide est la $\underline{\underline{b)}}$.

Exercice 45

f définie sur $\mathbb{R} - \{2/3\}$ $\quad f(x) = \dfrac{ax^2+b}{3x-2}$

a) On pose $u(x) = ax^2+b$ et $v(x) = 3x-2$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Donc $f'(x) = \dfrac{2ax(3x-2) - (ax^2+b)\times 3}{(3x-2)^2} = \dfrac{6ax^2 - 4ax - 3ax^2 - 3b}{(3x-2)^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{3ax^2 - 4ax - 3b}{(3x-2)^2}}$

b) $A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(0) = 1 \quad (1)$

$\mathcal{C}$ admet une tgte horizontale au point d'abscisse 1 $\Leftrightarrow f'(1) = 0 \quad (2)$

(1) $\Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{b}{-2} = 1 \Leftrightarrow b = -2$

(2) $\Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3a - 4a - 3b}{1^2} = 0 \Leftrightarrow -a - 3b = 0$

Donc $b=-2$ et $a=-3b$ $\Leftrightarrow$ $b=-2$ et $a=6$

$\boxed{a=6 \text{ et } b=-2}$

Exercice 58 f défini sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

Avant de répondre aux questions, calculons $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

a) VRAI car $1>0$ et $(x+1)^2>0$, donc $\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$

b) VRAI car $f'(x)=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow (x+1)^2=4 \Leftrightarrow x+1=2$ ou $x+1=-2$

$\Leftrightarrow \boxed{x=1 \text{ ou } x=-3}$

c) FAUX, car la dérivée de f ne peut jamais s'annuler.

d) FAUX, car pour $x=-1/2$ par exemple $f'(x)=\dfrac{1}{(1/2)^2}=4>1$.

ETUDE D'UN PLACEMENT.

1) $V_0=125$

a) $V_1=V_0+V_0\times\left(\dfrac{0{,}35}{100}\right)=V_0(1+0{,}0035)=1{,}0035\times V_0$
$=125{,}4375$ €

$V_2=V_1+V_1\times\left(\dfrac{0{,}35}{100}\right)=V_1\times(1{,}0035)=V_0\times(1{,}0035)^2=125{,}87$

b) De la même façon, on trouvera $V_{12}=V_0\times(1{,}0035)^{12}=130{,}35<135$

Donc Morgan ne pourra pas s'offrir le VTT dans l'année.

c) $\boxed{V_{n+1}=(1{,}0035)\,V_n}$ V_n est une suite géométrique de premier terme $V_0=125$ et de raison $1{,}0035$.

$$\boxed{V_n=125\times(1{,}0035)^n}$$