• Est-ce que un jour et éventuellement quand les 2 clans auront les mêmes effectifs ?

$n(t) = c(t) \iff \frac{40}{7}\left(22e^{-0,01t} - e^{0,06t}\right) = \frac{40}{7}\left(16,5e^{-0,01t} + e^{0,06t}\right)$

$\iff 22e^{-0,01t} - e^{0,06t} = 16,5\,e^{-0,01t} + e^{0,06t}$

$\iff 5,5\,e^{-0,01t} = 2e^{0,06t} \iff e^{\ln(5,5)} + e^{-0,01t} = e^{\ln(2)} + e^{0,06t}$

$\iff \ln(5,5) - 0,01t = \ln(2) + 0,06t \iff t = \frac{\ln(5,5) - \ln(2)}{0,07}$

$\iff \boxed{t \simeq 14,45 \text{ ans.}}$

Donc les 2 clans auront les mêmes effectifs au bout de 14 ans et 1/2 à peu près.

• Evolution des effectifs (voir feuille ② et ③)

• $\beta C \to \beta n C$ et $\gamma n \to \gamma n C$

on obtient le système suivant:
$$\begin{cases} \dot{n} = \alpha n + \beta n C \\ \dot{C} = \gamma n C + \delta C \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{n} = 0,02n - 0,04nC \\ \dot{C} = -0,03nC + 0,03C \end{cases}$$

La solution stable est telle que:
$$\begin{cases} 0,02n - 0,04nC = 0 \\ -0,03nC + 0,03C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (0,02 - 0,04C)n = 0 \\ (0,03 - 0,03n)C = 0 \end{cases}$$

Il y a donc 2 solutions $\begin{cases} n = 0 \\ C = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n = 1 \\ C = 1/2 \end{cases}$ ~~← la solution stable~~

• qu'est-ce que l'on pourrait dire sur la solution de ce système modifié.

On aurait un système d'équations différentielles de la forme
$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = 0,02n - 0,04n(t)c(t) \\ \frac{dC}{dt} = +0,03\cancel{n(t)}C(t) - 0,03n(t)C(t) \end{cases}$$

Ce sont des équations de Lotka-Volterra désignées également sous le terme de "modèle proie-prédateur"

$n(t)$ est la proie et $C(t)$ est le prédateur. (voir votre cours).