

$$y' = 5y + e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y' - 5y = e^{-x}$$

on cherche d'abord une solution de l'équation $y' - 5y = 0$

$$y' - 5y = 0 \quad \Leftrightarrow y = d x e^{5x}$$

on cherche ensuite une solution particulière de l'équation $y' - 5y = e^{-x}$

Posons $y = (ax + b) e^{-x}$ et trouvons a et b .

$$y' = -(ax + b) e^{-x} + a e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \text{De } y' - 5y &= -(ax + b) e^{-x} + a e^{-x} - 5(ax + b) e^{-x} \\ &= e^{-x} (-ax - b + a - 5ax - 5b) \\ &= e^{-x} (-6ax + a - 6b) \end{aligned}$$

$$\text{Il faut que } e^{-x} (-6ax + a - 6b) = e^{-x}$$

$$\text{Donc } -6a = 0 \quad \text{et} \quad a - 6b = 1$$

$$\text{Donc } a = 0 \quad \text{et} \quad b = -1/6.$$

Donc une solution particulière de l'équation est $y_0 = -\frac{e^{-x}}{6}$

$$\text{Donc } \boxed{y = d e^{5x} - \frac{e^{-x}}{6} \quad (d \in \mathbb{R}).}$$