Exercice 3

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{7} u_n + \frac{6}{7} \\ u_0 = 7 \end{cases}$$

1) a) $u_1 = \frac{1}{7} u_0 + \frac{6}{7} = \frac{7}{7} + \frac{6}{7} = \frac{13}{7}$

$u_2 = \frac{1}{7} u_1 + \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \times \frac{13}{7} + \frac{6}{7} = \frac{13}{49} + \frac{6}{7} = \frac{13}{49} + \frac{42}{49} = \frac{55}{49}$

b) On cherche a tel que la suite $V_n = U_n - a$ soit géométrique.

On a donc $u_{n+1} = V_{n+1} + a$ et $u_n = V_n + a$.

$u_{n+1} = \frac{1}{7} u_n + \frac{6}{7}$, donc $V_{n+1} + a = \frac{1}{7} V_n + \frac{a}{7} + \frac{6}{7}$

Donc $V_{n+1} = \frac{1}{7} V_n + \frac{6}{7} - \frac{6a}{7}$.

Pour que $V_{n+1} = \frac{1}{7} V_n$, donc que V_n soit géométrique, il faut que $\frac{6}{7} - \frac{6a}{7} = 0$, donc que $\underline{a = 1}$.

Donc la suite $V_n = U_n - 1$ est une suite géométrique de premier terme $V_0 = u_0 - 1 = 6$ et de raison $1/7$.

Donc $\boxed{V_n = 6 \times (1/7)^n}$, donc $\boxed{u_n = V_n + 1 = 1 + 6 (1/7)^n}$

2) Si on exprime V_n en fonction de u_0, on a $V_n = (u_0 - 1) \times (1/7)^n$.

Si $u_0 = 1$, $V_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, donc $V_n = 0$, donc $u_n = 1$.

Donc si $u_0 = 1$, la suite u_n est constante et est égale à 1.

Donc si l'on change la valeur de u_0, la suite est soit une suite ~~géométrique~~ constante, soit une suite décroissante, soit une suite croissante.

$U_n = 1 + (u_0 - 1) \times (1/7)^n$

Donc si $u_0 < 1$ $\quad U_n$ est croissante

si $u_0 > 1$ $\quad U_n$ est décroissante

si $u_0 = 1$ $\quad U_n = 1$ et est donc constante

Exercice 4

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+8}{2u_n+1} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1) $u_1 = \dfrac{u_0+8}{2u_0+1} = \dfrac{1+8}{2+1} = \dfrac{9}{3} = \boxed{3}$

$u_2 = \dfrac{u_1+8}{2u_1+1} = \dfrac{3+8}{6+1} = \boxed{\dfrac{11}{7}}$

$u_3 = \dfrac{u_2+8}{2u_2+1} = \dfrac{\frac{11}{7}+8}{\frac{22}{7}+1} = \dfrac{\frac{11+56}{7}}{\frac{29}{7}} = \boxed{\dfrac{67}{29}}$

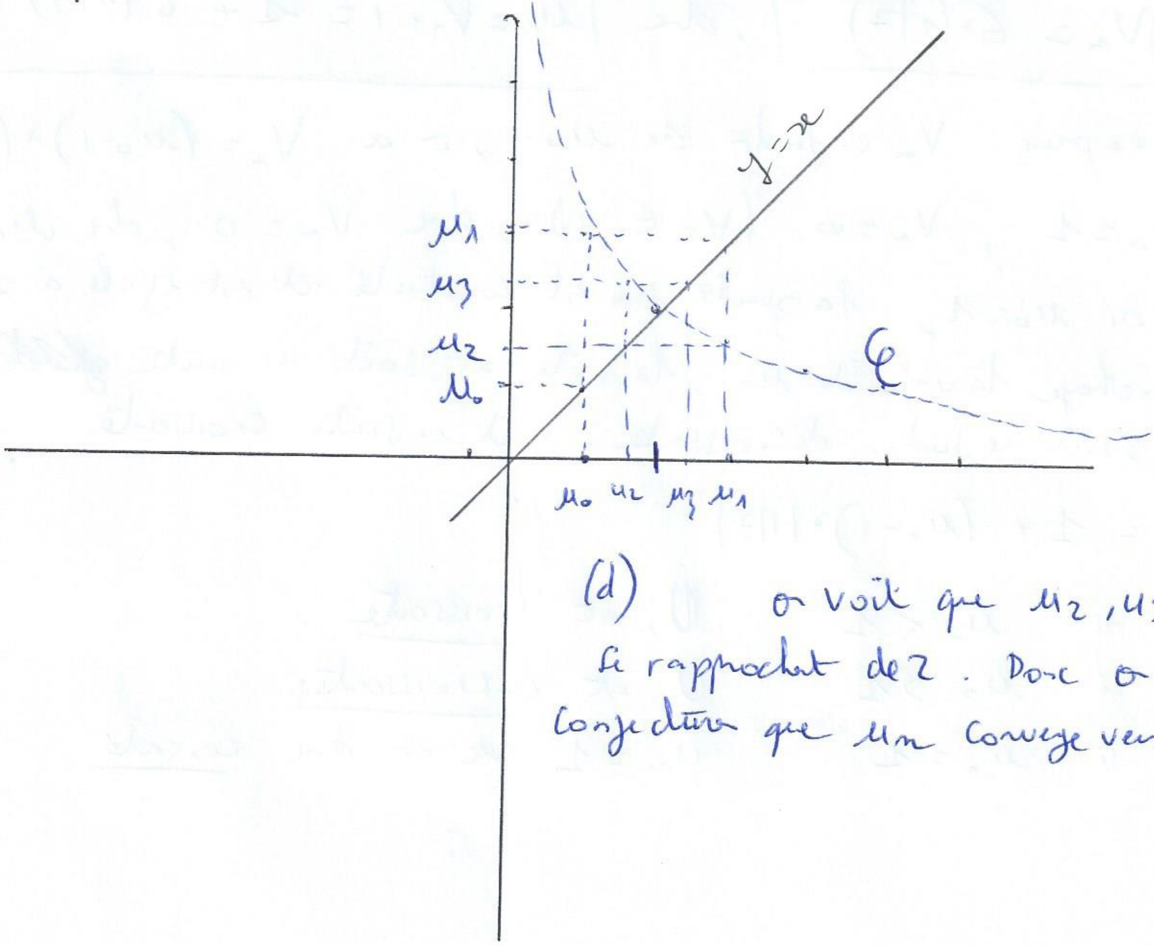
2) Sur $]-1/2\,;+\infty[$, $h(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$

(a) $h'(x) = \dfrac{(2x+1)-2(x+8)}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x+1-2x-16}{(2x+1)^2} = \dfrac{-15}{(2x+1)^2} < 0$

Donc la fonct° $h(x)$ est décroissante.

x	$-1/2$	$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘ $1/2$

(b) (c)



(d) On voit que u_2, u_3 se rapprochent de 2. Donc on peut conjecturer que u_n converge vers 2.

3) $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}$

(a) $v_0 = \frac{u_0-2}{u_0+2} = \frac{1-2}{1+2} = \boxed{\frac{-1}{3}}$ $\qquad V_1 = \frac{u_1-2}{u_1+2} = \frac{3-2}{3+2} = \boxed{1/5}$

$V_2 = \frac{u_2-2}{u_2+2} = \frac{\frac{11}{7}-2}{\frac{11}{7}+2} = \frac{\frac{11-14}{7}}{\frac{11+14}{7}} = \boxed{\frac{-3}{25}}$

$V_3 = \frac{u_3-2}{u_3+2} = \frac{\frac{67}{29}-2}{\frac{67}{29}+2} = \frac{67-58}{67+58} = \boxed{\frac{9}{125}}$

(b) Montrons que $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ est constant.

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2}}{\frac{u_n-2}{u_n+2}} = \frac{(u_{n+1}-2)(u_n+2)}{(u_{n+1}+2)(u_n-2)} = \frac{\left(\frac{u_n+8}{2u_n+1}-2\right)(u_n+2)}{\left(\frac{u_n+8}{2u_n+1}+2\right)(u_n-2)}$$

$$= \frac{\left(\frac{u_n+8-4u_n-2}{2u_n+1}\right)+(u_n+2)}{\left(\frac{u_n+8+4u_n+2}{2u_n+1}\right)+(u_n-2)} = \frac{(-3u_n+6)(u_n+2)}{(5u_n+10)+(u_n-2)}$$

$$= \frac{-3(u_n-2)(u_n+2)}{5(u_n+2)(u_n-2)} = \boxed{\frac{-3}{5}}$$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{-3}{5}$, donc V_n est une suite géométrique de raison $\frac{-3}{5}$ et de Premier terme $V_0 = \frac{u_0-2}{u_0+2} = \boxed{\frac{-1}{3}}$

(c) Donc $\boxed{V_n = (-1/3) + (-3/5)^n}$ $\qquad \lim_{+\infty} V_n = 0$

(d) $V_n = \frac{u_n-2}{u_n+2} \Leftrightarrow V_n(u_n+2) = u_n-2 \Leftrightarrow u_nV_n + 2V_n = u_n-2$

$\Leftrightarrow u_n(V_n-1) = -2-2V_n \Leftrightarrow u_n = \frac{-2-2V_n}{V_n-1} = \frac{2(1+V_n)}{(1-V_n)}$

Donc $u_n = \dfrac{2(1+V_n)}{1-V_n}$

$= \dfrac{2\left(1 - 1/3\,(-3/5)^n\right)}{\left(1 + 1/3\,(-3/5)^n\right)}$

$\lim\limits_{+\infty} u_n = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2(1+V_n)}{1-V_n} = \dfrac{2(1+0)}{1-0} = \boxed{2}$