$2y' - 3y = x^2 + 2x + 3$

1) Solution générale

$$2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2} y \Leftrightarrow \boxed{y^* = \alpha e^{3/2\, x}}$$

2) Solution particulière.

On cherche un polynôme de la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c$.

or $y_0'(x) = 2ax + b$.

Donc $2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x + 3$

$\Leftrightarrow \quad 4ax + 2b - 3ax^2 - 3bx - 3c = x^2 + 2x + 3$

$\Leftrightarrow \quad -3ax^2 + x(4a - 3b) + 2b - 3c = x^2 + 2x + 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 4a - 3b = 2 \\ 2b - 3c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/3 \\ b = \dfrac{4a - 2}{3} = \dfrac{-4/3 - 2}{3} = \boxed{-\dfrac{10}{9}} \end{cases}$$

$$3c = 2b - 3 \Leftrightarrow c = \frac{2b - 3}{3}$$

Donc $c = \dfrac{-\frac{20}{9} - \frac{27}{9}}{3} = \dfrac{-47}{27}$

Donc la solution particulière est $y_0(x) = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{10}{9} x - \dfrac{47}{27}$

Donc la solution de l'équation est :

$$\boxed{y = \alpha e^{3/2 x} - \frac{x^2}{3} - \frac{10}{9} x - \frac{47}{27}}$$