Soit $f(x) = \dfrac{|-x+3| + |2x+6|}{|-2x+8| - |3x-6|}$

on pose $A(x) = |-x+3| + |2x+6|$ et $B(x) = |-2x+8| - |3x-6|$

Rappel de la valeur absolue.

si $x \geq 0$, $|x| = x$ et si $x \leq 0$, $|x| = -x$

1)

si $x \leq 3$, $-x+3 \geq 0$, donc $|-x+3| = -x+3$

si $x \geq 3$, $-x+3 \leq 0$, donc $|-x+3| = x-3$

si $x \geq -3$, $2x+6 \geq 0$, donc $|2x+6| = 2x+6$

si $x \leq -3$, $2x+6 \leq 0$, donc $|2x+6| = -2x-6$

si $x \geq 4$, $-2x+8 \leq 0$, donc $|-2x+8| = 2x-8$

si $x \leq 4$, $-2x+8 \geq 0$, donc $|-2x+8| = -2x+8$

si $x \geq 2$, $3x-6 \geq 0$, donc $|3x-6| = 3x-6$

si $x \leq 2$, $3x-6 \leq 0$, donc $|3x-6| = -3x+6$.

on fait un Tableau d'Expressions.

x	$-\infty$ … -3	-3 … 2	2 … 3	3 … 4	4 … $+\infty$
$\lvert -x+3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	0 $x-3$	$x-3$
$\lvert 2x+6\rvert$	$-2x-6$	0 $2x+6$	$2x+6$	$2x+6$	$2x+6$
$\lvert -2x+8\rvert$	$-2x+8$	$-2x+8$	$-2x+8$	$-2x+8$	0 $2x-8$
$\lvert 3x-6\rvert$	$-3x+6$	$-3x+6$	0 $3x-6$	$3x-6$	$3x-6$
$A(x)$	$-3x-3$	$x+9$	$x+9$	$3x+3$	$3x+3$
$B(x)$	$x+2$	$x+2$	$-5x+14$	$-5x+14$	$-x-2$

Donc sur $]-\infty ; -3]$, $x+2$ ne peut pas s'annuler, donc

$$\boxed{\forall x \in]-\infty ; -3], \quad f(x) = \frac{-3x-3}{x+2}}$$

sur $[-3 ; 2]$, $x+2$ peut s'annuler en -2 , donc

$$\boxed{\forall x \in [-3 ; -2[\cup]-2 ; 2] , \quad f(x) = \frac{x+9}{x+2}}$$

sur $[2 ; 3]$, $-5x+14$ peut s'annuler en $\frac{14}{5}$, donc

$$\boxed{\forall x \in [2 ; 14/5[\cup]14/5 ; 3] , \quad f(x) = \frac{x+9}{-5x+14}}$$

sur $[3 ; 4]$; $-5x+14$ ne peut pas s'annuler , donc

$$\boxed{\forall x \in [3 ; 4] , \quad f(x) = \frac{3x+3}{-5x+14}}$$

et Enfin sur $[4 ; +\infty[$, $-x-2$ ne peut pas s'annuler

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [4 ; +\infty[, \quad f(x) = \frac{3x+3}{-x-2}}$$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 14/5\}}$$

2) Continuité et Dérivabilité.

Continuité en -3 , $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{-3^-} \frac{-3x-3}{x+2} = \frac{6}{-1} = -6$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{-3^+} \frac{x+9}{x+2} = \frac{6}{-1} = -6$

Les 2 limites sont égales, donc la fonction f est continue en -3.

Continuité en 2 , $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{2^-} \frac{x+9}{x+2} = \frac{11}{4}$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{2^+} \frac{x+9}{-5x+14} = \frac{11}{4}$ $\Big\} \Rightarrow f$ continue en 2.

Continuité en 3

$\lim\limits_{3^-} f(x) = \lim\limits_{3^-} \dfrac{x+9}{-5x+14} = \dfrac{12}{-1} = -12$

$\lim\limits_{3^+} f(x) = \lim\limits_{3^+} \dfrac{3x+3}{-5x+14} = \dfrac{12}{-1} = -12$

$\Rightarrow f$ continue en 3

Continuité en 4

$\lim\limits_{4^-} f(x) = \lim\limits_{4^-} \dfrac{3x+3}{-5x+14} = \dfrac{15}{-6} = \dfrac{5}{-2} = -\dfrac{5}{2}$

$\lim\limits_{4^+} f(x) = \lim\limits_{4^+} \dfrac{3x+3}{-x-2} = \dfrac{15}{-6} = \dfrac{-5}{2}$

$\Rightarrow f$ continue en 4.

Donc f est continue sur $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 14/5\}$.

Dérivabilité

$\forall x \in]-\infty ; -3]$, $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$, $f'(-3) = -3$

$\forall x \in [-3 ; -2[\cup]-2 ; 2]$, $f'(x) = \dfrac{-7}{(x+2)^2}$ $f'(-3) = -7$ et $f'(2) = \dfrac{-7}{16}$

$\forall x \in [2 ; 14/5[\cup]14/5 ; 3]$, $f'(x) = \dfrac{59}{(-5x+14)^2}$ $f'(2) = \dfrac{59}{16}$ et $f'(3) = 59$

$\forall x \in [3 ; 4]$, $f'(x) = \dfrac{57}{(-5x+14)^2}$ $f'(3) = 57$ et $f'(4) = \dfrac{57}{36}$

$\forall x \in [4 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$ $f'(4) = \dfrac{-3}{36}$

On voit que les nombres dérivés à gauche et à droite, en -3 ; 2 ; 3 et 4 ne sont pas les mêmes, donc f n'est pas dérivable en -3 ; 2 ; 3 et 4.