Exercice I

1) $P_1 : x+y+z-4=0 \qquad P_2 : 4x-2y+z+1=0$

$$D : \begin{cases} x = 1-k \\ y = -2k \\ z = -1+3k \end{cases}$$

(a) $M \in P_1 \cap P_2 \iff M \in P_1$ et $M \in P_2$

Donc si $M(x,y,z)$, on a : $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 4x-2y+z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4-y-z \\ 4(4-y-z)-2y+z+1=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=4-y-z \\ 16-4y-4z-2y+z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4-y-z \\ 17-6y-3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=\frac{17}{3}-2y \\ x=4-y-\frac{17}{3}+2y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=-\frac{5}{3}+y \\ y=y \\ z=\frac{17}{3}-2y \end{cases}$ Donc si on pose $y=k$

$$\boxed{\Delta \begin{cases} x=-\frac{5}{3}+k \\ y=k \\ z=\frac{17}{3}-2k. \end{cases}}$$

(b) $N(x;y;z) \in D \cap \Delta$

$\iff \begin{cases} x=1+h \\ y=-2h \\ z=-1+3h \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-5/3+h' \\ y=h' \\ z=\frac{17}{3}-2h' \end{cases} \iff \begin{cases} 1+h=-5/3+h' \\ -2h=h' \\ -1+3k=\frac{17}{3}-2h' \end{cases}$

$\iff \begin{cases} h'=\frac{8}{3}+k \\ -2k=8/3+k \\ -1+3k=\frac{17}{3}-\frac{16}{3}-2k \end{cases} \iff \begin{cases} k=8/9 \\ -1+24/9=\frac{1}{3}-\frac{16}{9} \end{cases}$ IMPOSSIBLE.

Les deux droites D et Δ ne sont pas coplanaires, leur vecteur directeur ne sont pas colinéaires ni orthogonaux.

2) $P_1 : 4x - 2y + 6z - 1 = 0$ $\quad$ $P_2 : 3x - y + 4z + 1 = 0$

$$P_3 : \begin{cases} x = 2 + k + l \\ y = -6 - k - 4l \\ z = 4 - k - 2l \end{cases}$$

- (P_1) et (P_2) : les vecteurs $\vec{n_1}(4 ; -2 ; 6)$ et $\vec{n_2}(3 ; -1 ; 4)$ des plans P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, donc les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas //.
leur intersection est donc une droite

$$M(x,y,z) \in (P_1) \cap (P_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 6z - 1 = 0 \\ 3x - y + 4z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 4z + 1 \\ 4x - 6x - 8z - 2 + 6z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2z - 3 = 0 \\ y = 3x + 4z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - 3/2 \\ y = -3z - \frac{9}{2} + 4z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - 3/2 \\ y = z - 7/2 \end{cases}$$

Donc $(P_1) \cap (P_2)$: $\boxed{\Delta_{12} \begin{cases} x = - k - 3/2 \\ y = k - 7/2 \\ z = k \end{cases}}$

- (P_1) et (P_3)

$$M \in (P_1) \cap (P_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 6z - 1 = 0 \\ x = 2 + k + l \\ y = -6 - k - 4l \\ z = 4 - k - 2l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 4k + 4l + 12 + 2k + 8l + 24 - 6k \\ -12l - 1 = 0 \\ x = 2 + k + l \\ y = -6 - k - 4l \\ z = 4 - k - 2l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 43 = 0 \quad \rightarrow \text{IMPOSSIBLE} \\ x = 2 + k + l \\ y = -6 - k - 4l \\ z = 4 - k - 2l \end{cases}$$

Donc les plans (P_1) et (P_3) sont parallèles et non confondus.

- (P_2) et (P_3)

$$M(x,y,z) \in (P_2)\cap(P_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y+4z+1=0 \\ x=2+k+l \\ y=-6-k-4l \\ z=4-k-2l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6+3k+3l+6+k+4l+16-4k-8l+1=0 \\ x=2+k+l \\ y=-6-k-4l \\ z=4-k-2l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29\cancel{k}-l=0 \\ x=2+k+l \\ y=-6-k-4l \\ z=4-k-2l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l=29 \\ x=31+k \\ y=-122-k \\ z=-54-k \end{cases}$$

Donc $(P_2)\cap(P_3)$: $\boxed{\Delta_{23} \begin{cases} x=31+k \\ y=-122-k \\ z=-54-k \end{cases}}$.

Exercice II

1) $$\begin{cases} \alpha(1+i)=1+3i \\ i\alpha^2=-4+3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1+3i}{1+i}=\dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ i\alpha^2=-4+3i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{2}(1+2i+3)=\frac{1}{2}(4+2i)=2+i \\ i(2+i)^2=i(4+i^2+4i)=i(3+4i)=-4+3i \end{cases}$$ cqfd.

Donc il existe bien un $\alpha=2+i$ tel que $\begin{cases} \alpha(1+i)=1+3i \\ \text{et} \\ i\alpha^2=-4+3i \end{cases}$.

(b) $f(z) = z^2 - (1+3i)z + (-4+3i)$

$f(z) = (z-\alpha)(z-i\alpha) = z^2 - i\alpha z - \alpha z + i\alpha^2$

$= z^2 - z\,\alpha(1+i) + i\alpha^2$

D'après la 1re question $\alpha(1+i) = 1+3i$ et $i\alpha^2 = -4+3i$

Donc $f(z) = z^2 - z(1+3i) + (-4+3i)$ cqfd

Les solutions de $f(z)=0$ sont donc $\boxed{z_1 = \alpha = 2+i}$ et $\boxed{z_2 = i\alpha = -1+2i}$

2) (a) Résoudre $X^2 - 3X - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$, donc $X_1 = \frac{3+5}{2} = 4$ et $X_2 = \frac{3-5}{2} = -1$

Donc les solutions sont $\boxed{X=-1 \text{ et } X=4}$

Rés $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

on pose $X = x^2$, on obtient alors $X^2 - 3X - 4 = 0$

Donc $X=-1$ ou $X=4$ $\Leftrightarrow$ $x^2=-1$ ou $x=4$.

x^2 ne peut pas être négatif, donc $x^2=-1$ est impossible dans $\mathbb{R}$.

Il reste $x^2=4$, donc $\boxed{x=-2 \text{ ou } x=2}$

(b) $z = x+iy$, donc $z^2 - 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow (x+iy)^2 - 3 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy - 3 - 4i = 0 \Leftrightarrow (x^2-y^2-3) + i(-2xy-4) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ -2xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=-2 \end{cases}$ cqfd.

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-2}{x} \\ x^2-\dfrac{4}{x^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2/x \\ x^4-4=3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-3x^2-4=0 \\ y=-2/x \end{cases}$$

CQFD

(c) $x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

si $x=2$, $y=-1$ et si $x=-2$, $y=1$.

Donc les solutions de (E) sont : $\boxed{2+i}$ et $\boxed{-2-i}$