Exercice I) z et $\bar{z}$ 2 nombres complexes de module 1.

$z \neq z'$, $\dfrac{zz'-1}{z'-z}$ est reel.

On pose $z_1 = \dfrac{zz'-1}{z'-z}$, Montrons que $\overline{z_1} = z_1$

$$\overline{z_1} = \overline{\left(\frac{zz'-1}{z'-z}\right)} = \frac{\overline{zz'-1}}{\overline{z'-z}} = \frac{\bar{z}\bar{z}'-1}{\bar{z}'-\bar{z}} = \frac{zz'}{zz'}\ \frac{\bar{z}\bar{z}'-1}{\bar{z}'-\bar{z}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{zz'\bar{z}\bar{z}' - zz'}{zz'\bar{z}' - zz'\bar{z}} = \frac{1-zz'}{z-z'} = \frac{zz'-1}{z'-z} = z_1.$$

$\overline{z_1} = z_1$, donc la partie imaginaire de z_1 est égale à 0

$\boxed{\text{Donc } z_1 \text{ est reel.}}$

$\dfrac{z^2-1}{z}$ imaginaire pur ?

$$z_2 = \frac{z^2-1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \times \frac{z^2-1}{z} = \frac{\bar{z}z^2-\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{z-\bar{z}}{1} = z-\bar{z}$$

si on pose $z = a+ib$, alors $\bar{z} = a-ib$.

$$z-\bar{z} = a+ib-a+ib = \underline{\underline{2ib}}$$

$\boxed{\text{Donc } z_2 \text{ est imaginaire}}$

Exercice II.

1.)

(a) cherchons a, tel que $z_1 = ai$ et $P(z_1)=0$

$$P(z_1) = a^4 + 6a^3 i - 24a^2 - 18ai + 63 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 24a^2 + 63 = 0 \\ 6a^3 - 18a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3\cancel{a} = 0 \\ a^4 - 24a^2 + 63 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ a^4 - 24a^2 + 63 = 0 \end{cases}$$

si $a^2 = 3$, $a^4 - 24a^2 + 63 = 3^2 - 24\times 3 + 63 = 9 - 72 + 63 = 0$

Donc $a = \sqrt{3}$ ou $a = -\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Donc } P \text{ possède 2 racines imaginaires pures : } i\sqrt{3} \text{ et } -i\sqrt{3}}$

(b) on pose $Q(z) = az^2 + bz + c$

cherchons a, b et c tels que $P(z) = (z^2+3)\,Q(z)$

$$(z^2+3)\,Q(z) = (z^2+3)(az^2+bz+c) = az^4 + bz^3 + cz^2 + 3az^2 + 3bz + 3c$$

$$= az^3 + bz^3 + (c+3a)z^2 + 3bz + 3c$$

Pour que $(z^2+2)\,Q(z) = P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

il faut que
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c+3a = 24 \\ 3b = -18 \\ 3c = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 21 \end{cases}$$

Donc il existe un polynôme $\boxed{Q(z) = z^2 - 6z + 21}$ tel que

$$P(z) = (z^2+3)\,Q(z).$$

2.) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2+3)(z^2 - 6z + 21) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z^2 + 3 = 0$ ou $z^2 - 6z + 21 = 0$

3

$z^2+3=0 \iff z=i\sqrt{3}$ ou $z=-i\sqrt{3}$

$z^2-6z+21=0$

on calcule $\Delta = b^2-4ac = 36-4\times21 = 36-84 = -48 = -16\times3$

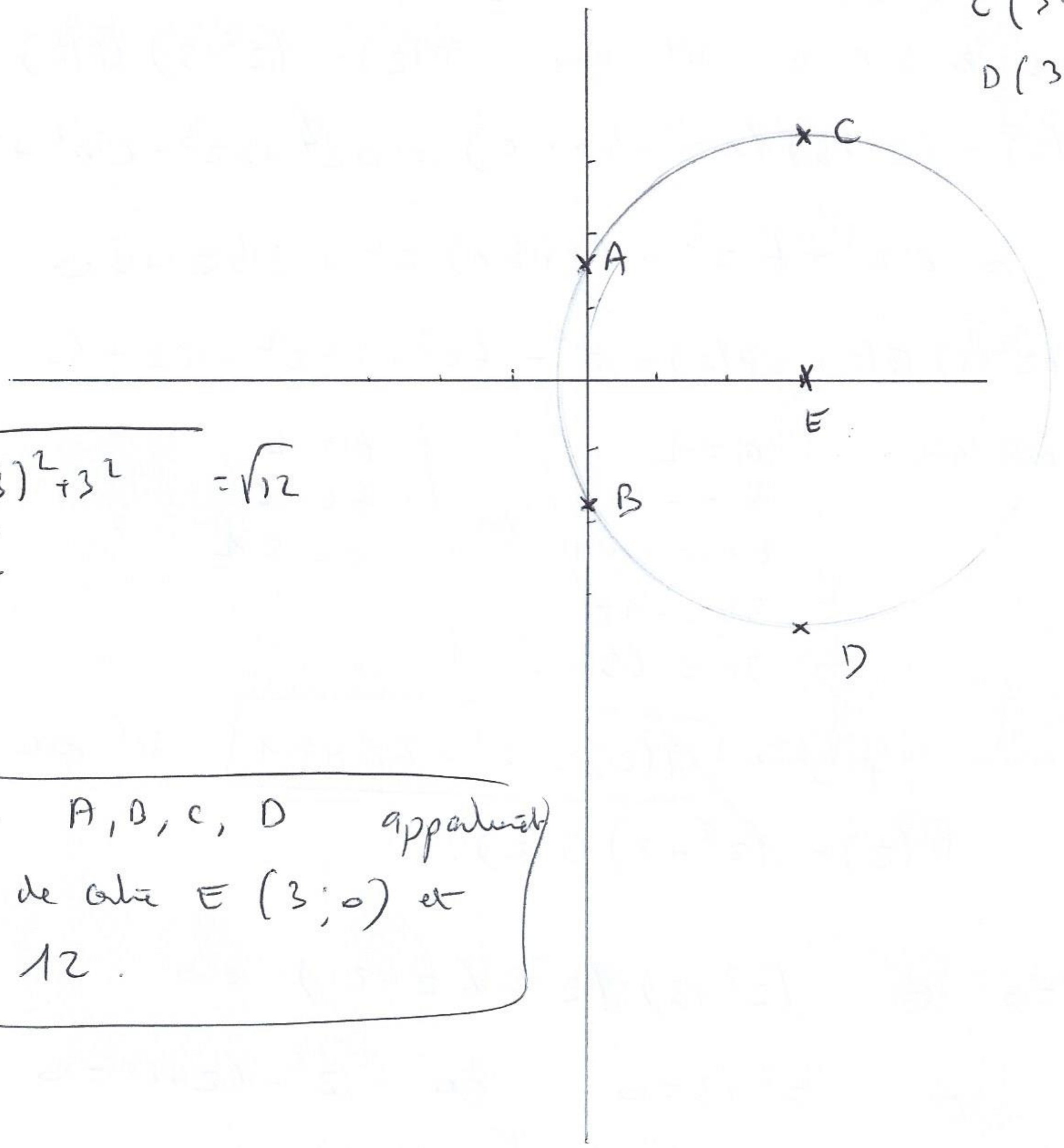
Donc $z = \dfrac{6+4i\sqrt{3}}{2} = 3+2i\sqrt{3}$

ou $z = \dfrac{6-4i\sqrt{3}}{2} = 3-2i\sqrt{3}$

Donc $P(z)=0$ admet 4 solutions :
$i\sqrt{3}$; $-i\sqrt{3}$; $3-2i\sqrt{3}$; $3+2i\sqrt{3}$

$A(i\sqrt{3})$
$B(-i\sqrt{3})$
$C(3+2i\sqrt{3})$
$D(3-2i\sqrt{3})$

$E(3)$



$EA = \sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{12}$
$EC = \sqrt{12}$
$ED = \sqrt{12}$
$EB = \sqrt{12}$

Donc A, B, C, D appartiennent au cercle de centre $E(3;0)$ et de rayon 12.

III $Z = f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$ (4)

1) $Z = f(z) = f(x+iy) = \dfrac{x+iy-2+i}{x+iy+2i} = \dfrac{(x-2)+i(y+1)}{x+i(y+2)}$

$= \dfrac{[(x-2)+i(y+1)][x-i(y+2)]}{x^2+(y+2)^2} = \dfrac{x(x-2)-i(y+2)(x-2)+i(y+1)x + (y+1)(y+2)}{x^2+(y+2)^2}$

$= \dfrac{(x^2-2x+y^2+3y+2)+i[\cancel{-xy}+2y-2x+4 \cancel{+xy}+x]}{x^2+(y+2)^2}$

$= \dfrac{(x^2+y^2-2x+3y+2)+i[\cancel{2x}-x+2y+4]}{x^2+(y+2)^2}$

On a bien $\boxed{Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}}$

2) (a) Pour que Z soit un réel, il faut que $Im(Z)=0$

Donc $-x+2y+4=0$

Donc $\boxed{\mathcal{E} : \text{Droite d'équation cartésienne } -x+2y+4=0}$

(b) Pour que Z soit imaginaire, il faut que $Re(Z)=0$

Donc $x^2+y^2-2x+3y+2=0$

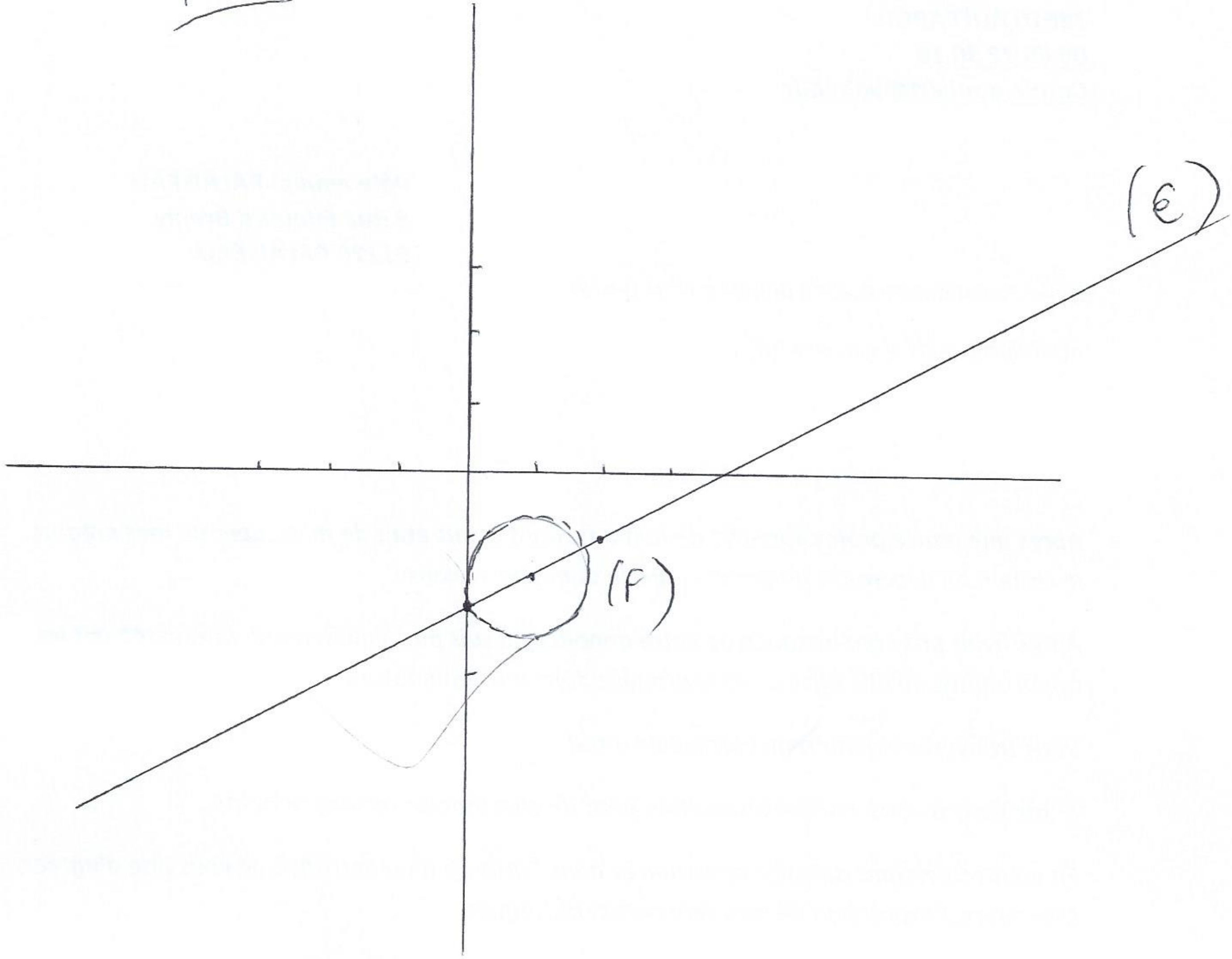
$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-1+(y^2+3y+\frac{9}{4})-\frac{9}{4}+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3/2)^2 = 1+9/4-2 = \dfrac{4+9-8}{4} = \dfrac{5}{4}$

F est un cercle de centre $A(1\,;-3/2)$ et de rayon

$\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

(c)



3) $|f(z)-1| \times |z+2i| = \left|\frac{z-2+i}{z+2i} - 1\right| \times |z+2i|$

$= \left|\frac{z-2+i-z-2i}{z+2i}\right| |z+2i| = |-2-i| = \sqrt{2^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

si $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, alors $|z+2i| = \sqrt{5}$

Donc $|f(z)-1| \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \iff |f(z)-1| = 1 \iff |Z-1| = 1$

Donc $M'(Z)$ parcourt un cercle de centre $A(1\,;0)$ et de rayon 1.