Partie I



1) 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Donc $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ ou $f(b) \leq 0 \leq f(a)$.

$\Leftrightarrow$ $\left(f(a) \leq 0 \text{ et } f(b) \geq 0\right)$ ou $\left(f(b) \leq 0 \text{ et } f(a) \geq 0\right)$

$\Rightarrow$ $f(a) \times f(b) \leq 0$ ou $f(b) \times f(a) \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f(a)\,f(b) \leq 0}$. cqfd.

2) $a=0$ $b=1$, donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, donc $\frac{a_0+b_0}{2} = \frac{1}{2}$

$f(a_0) = -1$ et $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = 1/2$, donc $f(a_0) \times f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) \leq 0$

Donc $a_1 = a_0 = 0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = 1/2$

$f(a_1) = -1$ et $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f(1/4) = 3/4 - 1 = -1/4$, donc $f(a_1) \times f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \geq 0$

Donc $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 1/4$ et $b_2 = b_1 = 1/2$

$f(a_2) = -1/4$ et $f\left(\frac{b_2+a_2}{2}\right) = f(3/8) = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$, donc $f(a_2) \times f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) \leq 0$

Donc $\boxed{a_3 = a_2 = 1/4 \quad \text{et} \quad b_3 = 3/8}$

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $\frac{a_n+b_n}{2}$ | $f(a_n)\,f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1/2 | $< 0$ |
| 1 | 0 | 1/2 | 1/4 | $> 0$ |
| 2 | 1/4 | 1/2 | 3/8 | $< 0$ |
| 3 | 1/4 | 3/8 | 5/16 | $> 0$ |

3) si $f(a_n) \times f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, alors $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$

Donc $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

si $f(a_n) \times f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$, alors $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$.

②

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$, donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Donc la suite $b_n - a_n$ est une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $b_0 - a_0 = 1$.

La raison de la suite $b_n - a_n$ est comprise entre 0 et 1, donc elle tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. $\lim_{+\infty} (b_n - a_n) = 0$

4) La suite $b_n - a_n$ est une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme 1

Donc $b_n - a_n = (1/2)^n > 0$

Si $f(a_n) f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$, $a_{n+1} - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n$

Donc $a_{n+1} - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0$

Donc dans ce cas, $a_n$ est constante et $b_n$ est décroissante.

Si $f(a_n) f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$, $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} > 0$

et $b_{n+1} - b_n = 0$

Donc dans ce cas, $b_n$ est constante et $a_n$ est croissante.

Donc $a_n$ est une suite croissante et $b_n$ est une suite décroissante

5) Montrons que $f(a_n) f(b_n) \leq 0$ par une démonstration par récurrence.

On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$, donc $f(a_0) + f(b_0) \leq 0$.

Supposons que $f(a_n) f(b_n) \leq 0$, montrons que $f(a_{n+1}) f(b_{n+1}) \leq 0$

Si $f(a_n) f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

$\boxed{\text{Donc } f(a_{n+1}) + f(b_{n+1}) \leq 0}$

Si $f(a_n) f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ~~an~~, donc

$f(a_n) + f(a_{n+1}) > 0$, donc $f(a_n)$ et $f(a_{n+1})$ sont de même signe, donc si $f(a_n) f(b_n) \leq 0$, alors $f(a_{n+1}) f(b_n) \leq 0$

et comme $b_n = b_{n+1}$, $\boxed{\text{on a } f(a_{n+1}) f(b_{n+1}) \leq 0.}$

Donc on a bien montré dans tous les cas, que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$. ③

Partie II : Premier algorithme

1) $s=0$ $s+p=0,1$
$f(s)=-1$ $f(s+p)=-0,7$
$f(s)f(s+p)>0$

$s=0,1$ $s+p=0,2$
$f(s)=-0,7$ $f(s+p)=-0,4$
$f(s)f(s+p)>0$

$s=0,2$ $s+p=0,3$
$f(s)=-0,4$ $f(s+p)=-0,1$
$f(s)f(s+p)>0$

$s=0,3$ $s+p=0,4$
$f(s)=-0,1$ $f(s+p)=0,2$
$f(s)f(s+p)\leq 0$

on affiche $0,3$

2) a) l'algorithme s'arrête toujours car on a vu dans la partie I, que $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

~~b)~~ Non car cela dépend de $p$

b) Parce qu'il n'y a qu'une seule valeur pour laquelle $f(s)$ et $f(s+p)$ sont de signes contraires.
$f(0)=-1$ donc il faut que $3p-1\geq 0$
Donc $3p\geq 1$, donc $p\geq 1/3$

Pour afficher 0, $p\geq 1/3$
Pour afficher 0,2, $p$ doit égal à 0,2
Pour ~~a~~ afficher 0,1, IMPOSSIBLE

3) Cet algorithme cherche les points ~~pour quels~~ auxquels la fonction change de signe.

Partie III

1) + $a=0$ $b=1$ $n=1$

- $b-a=1 > 10^{-1}=0,1$
$f(a)=-1$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(1/2)=1/2$, donc $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq 0$
Donc $b=1/2$ et $a=0$

- $b-a=1/2-0=1/2>0,1$
$f(a)=-1$ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(1/4)=-1/4$, donc $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$
Donc $b=1/2$ et $a=1/4$

- $b-a=1/4>0,1$
$f(1/4)=-1/4$ et $f\left(\frac{1/2+1/4}{2}\right)=f(3/8)=1/8$, donc $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq 0$
Donc $a=1/4$ $b=3/8$

4

- $b-a = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} > 0{,}1$

$f(1/4) = -1/4$ et $f\left(\frac{\frac{1}{4}+3/8}{2}\right) = f\left(\frac{5}{16}\right) = -1/16$, donc $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$

Donc $a = \frac{5}{16}$ et $b = 3/8$

- $b-a = \frac{3}{8} - \frac{5}{16} = \frac{6-5}{16} = \frac{1}{16} < 0{,}1$ donc arrêt et sortie de la boucle.

$$\boxed{a = \frac{5}{16} \text{ et } b = \frac{3}{8}}$$

2) Il s'agit du calcul, jusqu'à ce que la différence entre $a_n$ et $b_n$

a) soit plus petite qu'un seuil, des termes des suites $a_n$ et $b_n$.

~~b)~~ La suite $b_n - a_n$ tend vers 0, donc forcément il existe un $n$ tel que $b_n - a_n < 10^{-n}$, donc le programme s'arrêtera.

b) Non

3) Cet algorithme calcule la limite des suites $a_n$ et $b_n$ quand $n$ tend vers $\infty$.

Plus $n$ sera grand, plus $a$ et $b$ se rapprochent de $1/2$.