Exercice 3 $\qquad f(x) = \dfrac{2}{(x^2-4)^2}$

1) Pour que f soit définie, il ne faut pas que son dénominateur s'annule.

$$(x^2-4)^2 = 0 \iff x^2-4=0 \iff (x-2)(x+2)=0 \iff x=2 \text{ ou } x=-2$$

Donc pour que f soit défini, il faut que $x \neq -2$ et $x \neq 2$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-2;2\}.}$

2) $\forall x \in D_f$, $f(-x) = \dfrac{2}{((-x)^2-4)^2} = \dfrac{2}{(x^2-4)^2} = f(x)$.

Donc la fonction f est une fonction paire. Donc sa courbe représentative présentera une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Donc il est suffisant d'étudier f sur $[0;+\infty[- \{2\}$

3) on suppose que a et $b \in [0;2[$ et que $a<b$.
Trouvons le signe de $f(a)-f(b)$.

$$f(a)-f(b) = \frac{2}{(a^2-4)^2} - \frac{2}{(b^2-4)^2} = \frac{2(b^2-4)^2 - 2(a^2-4)^2}{(a^2-4)^2(b^2-4)}$$

$$= \frac{2(b^2-4+a^2-4)(b^2-4-(a^2-4))}{(a^2-4)^2(b^2-4)^2} = \frac{2(a^2+b^2-8)(b^2-a^2)}{(a^2-4)^2(b^2-4)^2}$$

or $0 \leq a < 2$ et $0 \leq b < 2$, donc $\underline{a^2+b^2-8<0}$

$a<b$, donc $a^2<b^2$, donc $\underline{b^2-a^2>0}$

$\underline{(a^2-4)^2>0}$ et $\underline{(b^2-4)^2>0}$, Donc $\underline{f(a)-f(b)<0}$, donc $f(a)<f(b)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc sur } [0;2[, \text{ si } a<b \text{ alors } f(a)<f(b) \\ \text{Donc } f \text{ est croissante sur } [0;2[.\end{array}}$$

si $2<a<b$, alors $a^2+b^2-8>0$; $b^2-a^2>0$ $(a^2-4)^2>0$ et $(b^2-4)^2>0$

Donc $f(a)-f(b)>0$, donc $f(a)>f(b)$.

Donc sur $]2 ; +\infty[$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Donc f est décroissante sur $]2 ; +\infty[$.

4)

x	-5		-2		0		2		$+5$
f	$\frac{2}{441}$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$2/441$

5)