$\int_0^2 f(t)\,dt$?   avec $f(x) = 4x(2-x)$

Partie I

1) Pour $n=1$, l'algorithme affiche $f(0)=0$

Pour $n=2$, l'algorithme affiche $\dfrac{f(0)+f(1/2)}{2} = \frac{1}{2} f(1/2) = \dfrac{3}{4}$

2) Pour $n=4$, l'algorithme affiche $\dfrac{f(0)+f(1/4)+f(2/4)+f(3/4)}{4} = \dfrac{34}{32}$

3) Voir dessins page 2

4) l'algorithme calcule la somme des aires de tous les rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ delimités par la courbe, l'axe des x et la droite $x=0$ et la droite $x=1$.

La valeur retournée est un minorant de la valeur recherchée.

5) on a un minorant, donc il faut rechercher un majorant.

Pour ce faire, il faut changer :

affecter $f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n}$ à r $\Longrightarrow$ $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \times \frac{1}{n}$ à r

Voir dessin page (2)

(2)

Dans tout ce qui suit on s'intéresse à la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par : $f(x) = 4x(2-x)$.

On cherche à évaluer l'aire comprise sous cette courbe, c'est à dire approximer le nombre $\int_0^2 f(t)\,dt$.

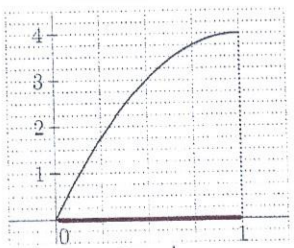
La parabole étant symétrique par rapport à la droite $x = 1$, on décide de se restreindre à l'intervalle $[0 ; 1]$, puis l'on multipliera l'aire trouvée par 2.

Partie I : Étude d'un premier algorithme

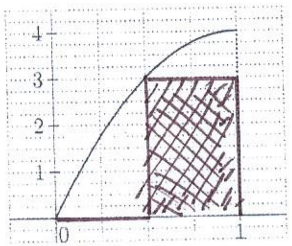
On considère l'algorithme :

```
Entrée : n un entier naturel non nul.
Initialisation : Saisir n, et affecter 0 à A.
Traitement :
    Pour k de 0 jusqu'à n − 1 faire
        affecter f(k/n) × 1/n à r
        affecter A + r à A
    fin Pour
Traitement : afficher A.
```

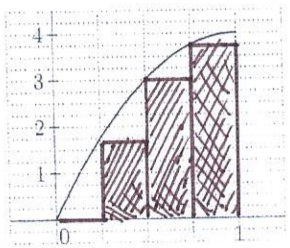
1. Qu'affiche cet algorithme pour $n = 1$? Qu'affiche-t-il pour $n = 2$?
2. Qu'affiche cet algorithme pour $n = 4$?
   On pourra disposer le travail de l'algorithme dans un tableau comportant une ligne par valeur de k.
3. Interpréter graphiquement (sur les dessins fournis) les résultats trouvés au 1. et 2.



n=1

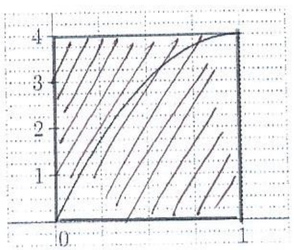


n=2

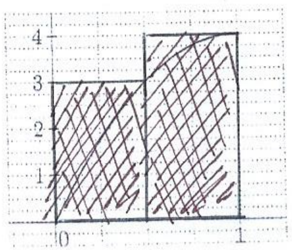


n=4

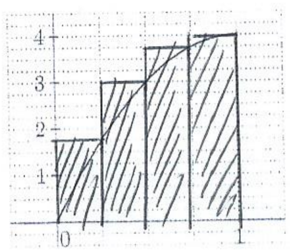
4. Expliquer ce que fait cet algorithme en général. Que peut-on dire de la valeur retournée par l'algorithme relativement à notre recherche ?
5. Imaginer ce que l'on doive modifier dans cet algorithme pour pouvoir disposer d'un encadrement de l'aire cherchée.
   Illustrer les résultats du nouvel algorithme (pour $n = 1$, $n = 2$, et $n = 4$) ci-dessous.



n=1



n=2



n=4

Partie II

1) Pour $n=1$, l'algorithme affiche $\dfrac{f(0)+f(1)}{2} = \dfrac{f(1)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Pour $n=2$, il affiche $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f(0)+f(1/2)}{2} + \dfrac{f(1/2)+f(1)}{2}\right] = \dfrac{1}{4}\left(f(0)+2f(1/2)+f(1)\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left(f(0)+2f(1/2)+f(1)\right)$

Pour $n=4$, il affiche $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}\left(f(0)+f(1/4)+f(1/4)+f(2/4)+f(2/4)+f(3/4)+f(3/4)+f(4/4)\right)\right]$.

$= \dfrac{1}{8}\left[f(0)+2f(1/4)+2f(2/4)+2f(3/4)+f(1)\right]$

2) voir feuille (4)

3) Cet algorithme calcule la moyenne de l'algorithme I) 1) et de l'algorithme I) 5)
Il calcule la somme de toutes les aires des formes geometriques (triangles ou quadrilatères de largeur $1/n$ delimités par la courbe f, l'axe des x, la droite $x=0$ et ~~la~~ droite $x=1$.

Partie III

Avant d'Affiche A, il faut placer l'instruction

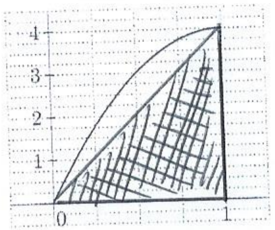
$\boxed{\text{affecter } 2*A \text{ à } A.}$

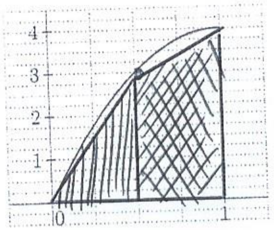
4

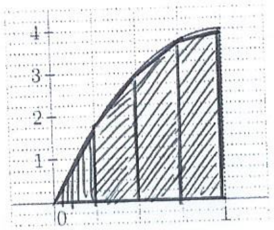
Partie II : Étude d'un second algorithme

```
Entrée : n un entier naturel non nul.
Initialisation : Saisir n, affecter 0 à A.
Traitement :
    Pour k de 0 jusqu'à n − 1 faire
        affecter 1/n × (f(k/n) + f((k+1)/n))/2 à t
        affecter A + t à A.
    fin Pour
Sortie : Afficher A
```

1. Qu'affiche cet algorithme pour $n = 1$? Qu'affiche-t-il pour $n = 2$? Qu'affiche-t-il pour $n = 4$?
2. Interpréter graphiquement (sur les dessins fournis) les résultats trouvés.





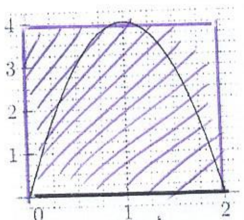


3. Expliquer ce que fait cet algorithme en général. Que peut-on dire de la valeur retournée par l'algorithme relativement à notre recherche ?

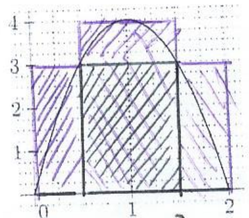
Partie III : Retour au problème initial

On cherche à évaluer directement $\int_0^2 f(t)dt$

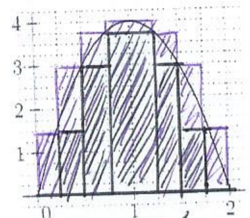
Imaginer comment modifier les algorithmes du I et du II pour répondre au problème.
En particulier pour le I. est-il toujours possible d'obtenir un encadrement de l'intégrale ? 1) 5)



n=1

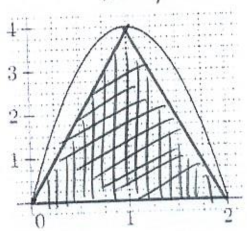


n=2

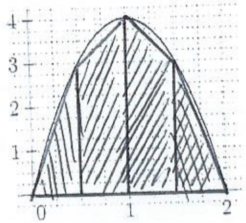


n=4

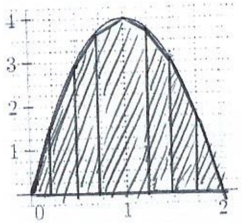
I



n=1



n=2



n=4

II