Question préliminaire :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{1}^{n} (2p+1)^2 = \frac{n(4n^2+12n+11)}{3}$ (P_n)

Pour $n=1$ $\sum_{1}^{1} (2p+1)^2 = (2\times1+1)^2 = 3^2 = 9$

et $\frac{n(4n^2+12n+11)}{3} = \frac{1\times(4+12+11)}{3} = \frac{27}{3} = 9$

Donc (P_n) est vraie au rang 1.

Supposons que (P_n) est vraie, il faut montrer que (P_{n+1}) est vraie, c'est à dire que $\sum_{1}^{n+1} (2p+1)^2 = \frac{(n+1)(4(n+1)^2+12(n+1)+11)}{3}$

$$\frac{(n+1)(4(n+1)^2+12(n+1)+11)}{3} = (n+1)\left(\frac{4n^2+8n+4+12n+12+11}{3}\right) = \frac{(n+1)(4n^2+20n+27)}{3} \quad (1)$$

$$\sum_{1}^{n+1} (2p+1)^2 = \sum_{1}^{n} (2p+1)^2 + \sum_{n+1}^{n+1} (2p+1)^2$$

$$= \frac{n(4n^2+12n+11)}{3} + (2n+3)^2$$

$$= \frac{4n^3+12n^2+11n+3(4n^2+9+12n)}{3}$$

$$= \frac{4n^3+12n^2+11n+12n^2+27+36n}{3}$$

$$= \frac{4n^3+24n^2+47n+27}{3} = \frac{4n^3+20n^2+27n + 4n^2+20n+27}{3}$$

$$= \frac{n(4n^2+20n+27) + 1\times(4n^2+20n+27)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(4n^2+20n+27)}{3} \quad (2)$$

$(1) = (2)$, donc (P_{n+1}) est vraie.

Donc (P_n) est démontrée.

$a_0 = 0 \qquad a_{i+1} = a_i + (2i+1) \times \frac{a}{n^2}$

1) $n=4$

$a_0 = 0 \qquad a_1 = a_0 + \frac{a}{4^2} = \underline{\underline{\frac{a}{16}}}$

$a_2 = a_1 + 3 \times \frac{a}{16} = \frac{a}{16} + \frac{3a}{16} = \frac{4a}{16} = \underline{\underline{\frac{a}{4}}}$

$a_3 = a_2 + 5\frac{a}{16} = \frac{a}{4} + \frac{5a}{16} = \frac{4a+5a}{16} = \underline{\underline{\frac{9a}{16}}}$

$a_4 = a_3 + 7\frac{a}{16} = \frac{9a}{16} + \frac{7a}{16} = \frac{16a}{16} = \underline{\underline{a}}$

Je vous laisse placer les points sur le graphique.

2) a) $a_1 = \frac{a}{n^2}$; $a_2 = \frac{4a}{n^2}$; $a_3 = \frac{9a}{n^2}$; ... ; $a_5 = \frac{25a}{n^2}$

Montrons par recurrence que $\boxed{a_k = \frac{k^2}{n^2} + a}$

Pour $k=1$ $\quad a_1 = \frac{a}{n^2} = \frac{1^2}{n^2} a$, donc c'est vrai au rang 1

Supposons que $a_k = \frac{k^2}{n^2} + a$, Montrons que $a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{n^2} + a$

$a_{k+1} = a_k + (2k+1) \times \frac{a}{n^2} = \frac{k^2}{n^2} a + \frac{(2k+1)a}{n^2} = \frac{a}{n^2} \times (k^2 + 2k + 1)$

$= \frac{(k+1)^2}{n^2} a$ CQFD.

Donc $\boxed{\forall i \in [0 ; n] \quad , a_i = \frac{i^2}{n^2} + a}$

Donc les coordonnées des points A_i sont $\left(\frac{a i^2}{n^2} ; 0\right)$

Et les coordonnées du point B_i sont $\left(\frac{a i^2}{n^2} ; \frac{i}{n}\sqrt{a}\right)$

b) ~~Aire du Trapèze $(A_p A_{p+1} B_{p+1} B_p)$ est $\frac{(a_{p+1} - a_{p+1}) \times (b_p + b_{p+1})}{2}$~~

3

b) Aire du Trapeze $(A_p A_{p+1} B_{p+1} B_p)$ est :

$$AT_p = \frac{(a_{p+1}-a_p)\times(b_p+b_{p+1})}{2} = \frac{\left(\frac{a(p+1)^2}{n^2} - \frac{a\,p^2}{n^2}\right)\left(\frac{p\sqrt{a}}{n} + \frac{(p+1)\sqrt{a}}{n}\right)}{2}$$

Donc $AT_p = \frac{a}{n^2}(2p+1) \times \frac{\sqrt{a}}{n} \times (2p+1) \times \frac{1}{2}$

$$\boxed{= \frac{a\sqrt{a}}{2n^3}(2p+1)^2}$$

c) $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} AT_p = \sum_0^{n-1} \frac{a\sqrt{a}}{2n^3} \times (2p+1)^2 = \frac{a\sqrt{a}}{2n^3} \times \sum_0^{n-1} (2p+1)^2$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{2n^3}\left(\sum_1^{n-1} (2p+1)^2 + 1\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{2n^3}\left(\frac{(n-1)(4(n-1)^2+12(n-1)+11)}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{6n^3} \times \left((n-1)(4n^2-8n+4+12n-12+11)+3\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{6n^3} \times \left((n-1)(4n^2+4n+3)+3\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{6n^3}\left(4n^3+4n^2+3n-4n^2-4n-3+3\right) = \frac{a\sqrt{a}}{n^3} \times (4n^3-n)$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{6n^2}(4n^2-1)$$

d) $\lim_{+\infty} S_n = \lim_{+\infty} \frac{a\sqrt{a}}{6n^2}(4n^2-1) = \underline{\frac{4a\sqrt{a}}{6}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}a\sqrt{a}}}$

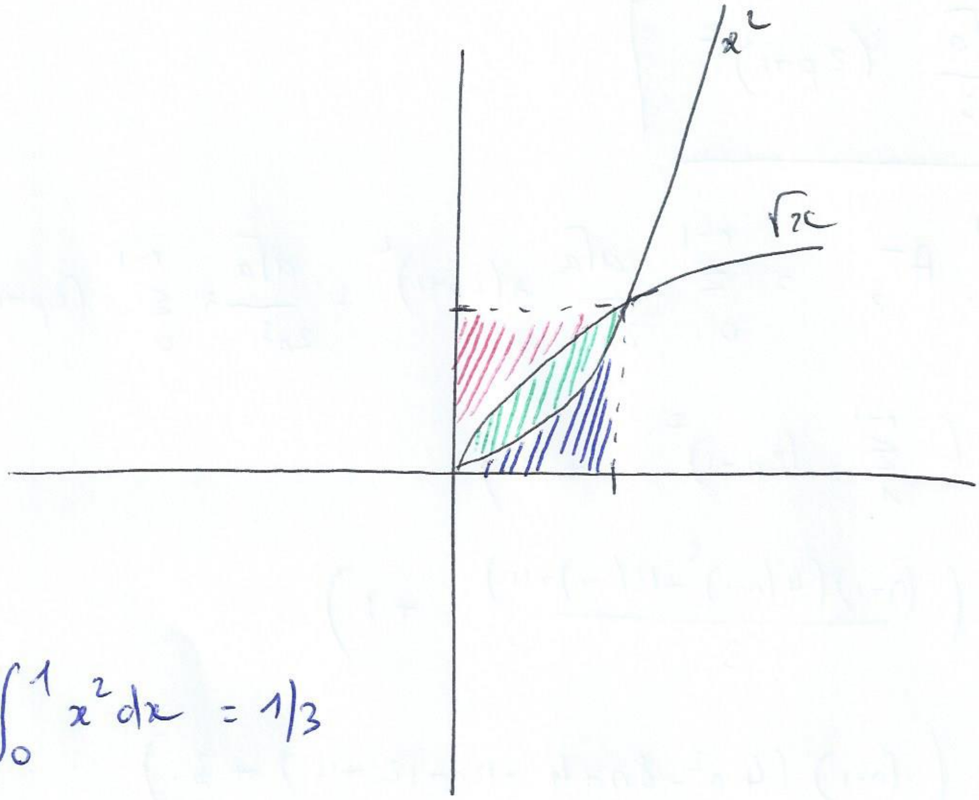
Et S_n est la somme de surfaces de Trapèzes et $\sqrt{x}$ présente une forme curviligne. donc $\int_0^a \sqrt{x}\,dx$ n'est pas forcément égal à $\lim_{+\infty} S_n$.

3)

(a) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} \times 1 \times \sqrt{1} = \frac{2}{3}$

$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

(b)



$\mathcal{A}_{Bleue} = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$

$\mathcal{A}_{Verte} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x})\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1/3$

$\mathcal{A}_{Rouge} =$ Aire du Carré Unité $- \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 1 - 2/3 = 1/3$

Donc $\mathcal{A}_{Bleue} = \mathcal{A}_{Verte} = \mathcal{A}_{Rouge}$.