Exercice I

(1)

1) $x > 0$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$ (P_n)

a) au rang 0

si $n=0$ $\quad (1+x)^n = (1+x)^0 = 1$ et $1+nx = 1+0 = 1$

$1 \geq 1$, donc la propriété est vraie au rang 0.

b) Supposons que la propriété est vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est à dire que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$$

on sait que $(1+x)^n \geq 1+nx$, donc $(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx)$

car $(1+x) > 0$

Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$

$nx^2 > 0$, donc $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$.

Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ cqfd

Donc (P_n) est vérifiée.

2) Une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q peut s'écrire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$

$q > 1$, donc $\exists x > 0$ tel que $q = 1+x$

Donc $u_n = u_0 \times (1+x)^n = (1+x)^n$

d'après la question 1), $(1+x)^n \geq 1+nx$

Donc $u_n \geq 1+nx$

Donc $\lim\limits_{+\infty} u_n \geq \lim\limits_{+\infty} (1+nx) = +\infty$

Donc u_n diverge vers $+\infty$

Exercice II

$\forall x \in [0; +\infty[\quad , f(x) = \dfrac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}}$

(2)

1) $f(x) = \dfrac{3e^{x/4}}{2+e^{x/4}} = \dfrac{3e^{x/4} \times e^{-x/4}}{(2+e^{x/4})e^{-x/4}} = \dfrac{3e^{0}}{2e^{-x/4}+e^{0}}$

$= \dfrac{3}{2e^{-x/4}+1} = \dfrac{3}{1+2e^{-x/4}}$ cqfd

2) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{3}{1+2e^{-x/4}} = \dfrac{3}{1} = 3$

3) La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{2\times\frac{3}{4}\, e^{-x/4}}{(1+2e^{-x/4})^2} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{e^{-x/4}}{(1+2e^{-x/4})^2}$

on remarque que $\forall x \in [0; +\infty[, \quad f'(x) > 0$

Donc la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3

4) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

De plus $f(0) = 1 < 2,8 < \lim\limits_{+\infty} f(x) = 3$. Donc d'après le corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α unique appartenant à $[0; +\infty[$, tel que $f(\alpha) = 2,8$.

on trouve par la calculatrice $\alpha \simeq 13,33$

III) $z_A = -2i \quad z_B = -\sqrt{3} + i \quad z_C = \sqrt{3} + i$

1) a) $|z_A| = 2$, donc $z_A = 2 \times \left(-\frac{2i}{2}\right) = 2 \times (-i) = 2(0 + i(-1))$

Donc $z_A = 2 \times (\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)) = \underline{\underline{2e^{-i\pi/2}}}$

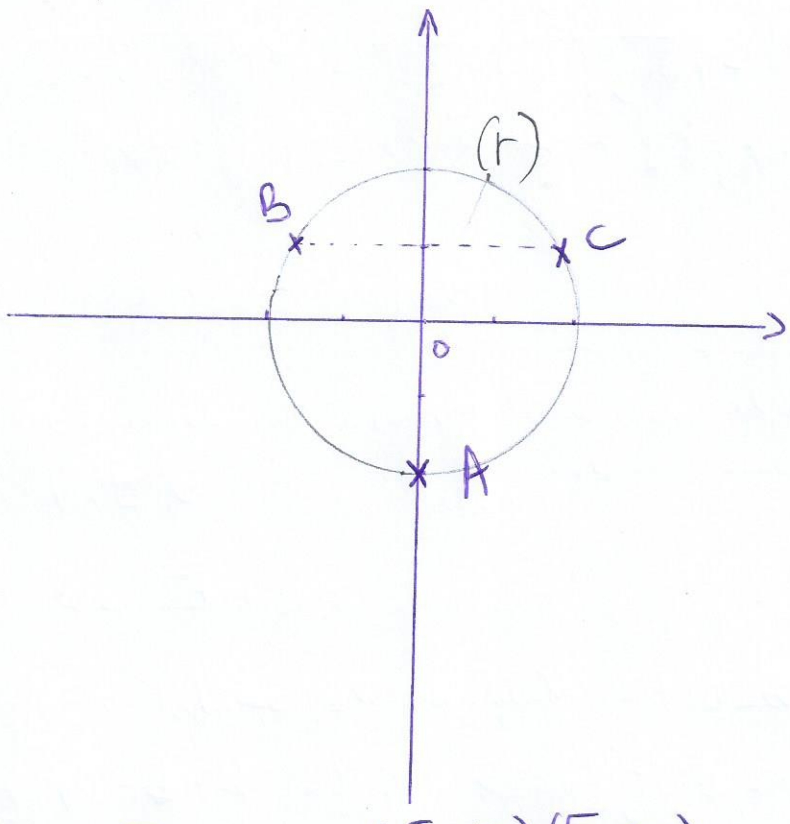
$|z_B| = \sqrt{3+1} = 2$, donc $z_B = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \underline{\underline{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}}$

$|z_C| = 2$, donc $z_C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)\right)$

$= \underline{\underline{2e^{i\pi/6}}}$

b) $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$, donc les points A, B et C appartient au cercle de centre O et de rayon 2.



2) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{3 + 9} = \frac{-3 + 6\sqrt{3}i + 9}{12}$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\pi/3 + i\sin\pi/3 = e^{i\pi/3}$$

3) on en déduit que ABC est un triangle equilatéral.