① (a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ ①

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 5 = -16$

Donc $z = \dfrac{2+4i}{2} = \underline{\underline{1+2i}}$ ou $z = \underline{\underline{1-2i}}$

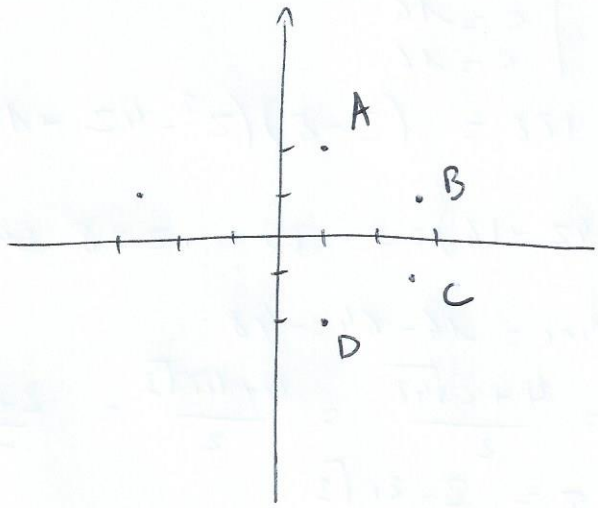
(b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

$\Delta = 4(1+\sqrt{3})^2 - 4(5+2\sqrt{3}) = 4(1+3+2\sqrt{3}) - 20 - 8\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3} - 20 - 8\sqrt{3} = -4.$

Donc $z = \dfrac{2+2i}{2} = \underline{\underline{1+i}}$ ou $z = \underline{\underline{1-i}}$

② $z_A = 1+2i$ ; $z_B = 1+\sqrt{3}+i$ ; $z_C = 1+\sqrt{3}-i$ ; $z_D = 1-2i$

(a)




(b) $z_D - z_A = -4i$ $z_C - z_B = -2i$, donc les segments AD et BC sont parallèles. ABCD est donc un trapèze.

(c) $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i} = \dfrac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i} = \dfrac{(-\sqrt{3}-3i)(-\sqrt{3}-i)}{3+1}$

$= \dfrac{3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{4} = \dfrac{4i\sqrt{3}}{4} = \underline{\underline{i\sqrt{3}}}$

$\mathrm{Arg}(i\sqrt{3}) = \pi/2$, donc les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires.

2

$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0 \quad (E)$

(a) $8^3 - 12\times 8^2 + 48\times 8 - 128 = 512 - 768 + 384 - 128$
$= 0$

Donc 8 est solution de (E).

(b) $(z-8)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - 8az^2 - 8bz - 8c$
$= az^3 + (b-8a)z^2 + (c-8b)z - 8c$
$= z^3 - 12z^2 + 48z - 128$

Donc $a = 1$
$b - 8a = -12$
$c - 8b = 48$
$-8c = -128$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 16 \\ c = 16 \end{cases}$

Donc $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z-8)(z^2 - 4z + 16)$

(c) $(E) \Leftrightarrow (z-8)(z^2-4z+16) = 0 \Leftrightarrow z = 8$ ou $z^2 - 4z + 16 = 0 \; (F)$

(F) : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 64 = -48$

Donc $z = \dfrac{4 + i\sqrt{48}}{2} = \dfrac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{2 + 2i\sqrt{3}}}$

ou $z = \underline{\underline{2 - 2i\sqrt{3}}}$

(E) admet pour solution $S = \{ 8 ; 2 - 2i\sqrt{3} ; 2 + 2i\sqrt{3} \}$

2) $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$ ; $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ $\quad z_C = 8$

$q = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3} - 8}{2 + 2i\sqrt{3} - 8} = \dfrac{-6 - 2i\sqrt{3}}{-6 + 2i\sqrt{3}} = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(-3 - i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}{9 + 3} = \dfrac{9 + 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i - 3}{12} = \dfrac{6 + 6\sqrt{3}i}{12}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}$

$|q| = 1$ , $q = 1 \times \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}$

Donc $q$ a pour ~~affixe~~ module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$.

$|z-(1+i)|=\sqrt{2}$

On pose $z=x+iy$.    et $z_A=1+i$    Donc $M(x;y)$ et $A(1;1)$

Donc $|x+iy-1-i|=\sqrt{2} \iff |(x-1)+i(y-1)|=\sqrt{2}$

$\iff \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{2} \iff \underline{\underline{AM=\sqrt{2}}}$    cqfd

---

$z=x+iy$    $M(x;y)$    $z_A=\cancel{1+}\,i$    Donc $A(0;1)$

$z_B=1$, donc $B(1;0)$

$|z-i|=|z-1| \iff |(x+iy)-i| = |(x+iy)-1|$

$\iff |x+i(y-1)| = |(x-1)+iy|$

$\iff \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\cancel{\iff x^2+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2 \iff 2x=2y}$.

$\iff MA = MB$