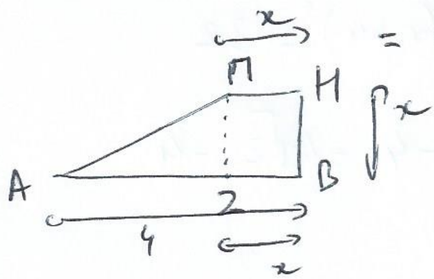
(1)

1) les points B, M et D sont alignés et les points B, H, C sont alignés et (HM) // (DC), donc d'après le Théorème de Thalès.

$\frac{DC}{CB} = \frac{HM}{HB}$, donc $\frac{4}{4} = \frac{HM}{x}$, donc $HM = \frac{4}{4} \times x = x$ cqfd.

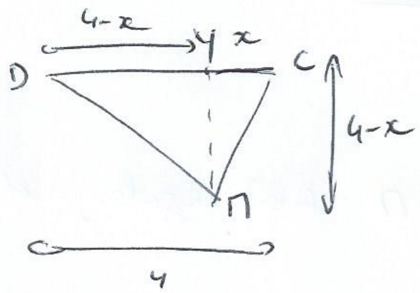
2) $\mathcal{A}(ABHM) = \text{Aire}(MHBZ) + \text{Aire}(AZM) = (HM \times HB) + \frac{AZ \times MZ}{2}$

$= x \times x + \frac{x \times (4-x)}{2} = x^2 + 2x - \frac{x^2}{2} = 2x + \frac{x^2}{2}$



Donc $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$

3)



$\text{Aire}(CDM) = \text{Aire}(DYM) + \text{Aire}(YMC)$

$= \frac{(4-x)\times(4-x)}{2} + \frac{x \times (4-x)}{2}$

$= \frac{16 + x^2 - 8x}{2} + \frac{4x - x^2}{2}$

$= \frac{16 - 4x}{2} = 8 - 2x$

Donc $g(x) = 8 - 2x$

4) $f(x) = g(x) \iff \frac{x^2}{2} + 2x = 8 - 2x \iff \frac{x^2}{2} + 4x - 8 = 0$

$\iff 2\left(\frac{x^2}{2} + 4x - 8\right) = 0 \iff x^2 + 8x - 16 = 0$ cqfd.

5) D'après la calculatrice, on voit que la fonction est croissante entre
(a) 0 et 4 et qu'elle croise l'axe des abscisses en un point.

$h(0) = -16$; $h(1) = -7$ et $h(2) = 4$.

Donc $1 < x_0 < 2$

②

b) Par balayage, on trouve que $1,656 < x_0 < 1,657$

c) $\forall x \in [0;4]$, $(x+4)^2 - 32 = x^2 + 8x + 16 - 32$

$= x^2 + 8x - 16 = h(x)$ cqfd

~~Donc~~ $\cancel{f(x) = g(x)} \cancel{\Leftrightarrow}$

Donc $h(x) = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 32$

$\Leftrightarrow x + 4 = \sqrt{32} \Leftrightarrow x = \sqrt{32} - 4 = 4\sqrt{2} - 4$

$x = 4(\sqrt{2} - 1)$.

Donc $x_0 = 4(\sqrt{2} - 1)$

6) Pour que les aires du trapèze ABMN et CDM soient égales, il faut que $x = x_0$.

$BM^2 = x_0^2 + x_0^2 = 2x_0^2$, donc $BM = x_0\sqrt{2}$

$BM = 4(\sqrt{2} - 1) \times \sqrt{2} = 4(2 - \sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2} \simeq 2,34$ cm.

Donc M doit être à une distance de $4(2-\sqrt{2}) \simeq 2,34$ cm de B sur le segment BD.