Exercice 1 $\qquad y'' + 16y = 0 \quad (E)$

1) La solution générale de cette équation est

$$y = \underline{\alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x). = f(x).}$$

2) $f(0) = \frac{1}{10}$, donc $\alpha \times \cos(4\times 0) + \beta\sin(4\times 0) = 1/10.$

Donc $\alpha = \frac{1}{10}$

$f'(0) = \frac{-2\sqrt{3}}{5}$ $\qquad f'(x) = -4\alpha\sin(4x) + 4\beta\cos 4x$

donc $f'(0) = 4\beta$, donc $4\beta = \frac{-2\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \beta = \frac{-\sqrt{3}}{10}.$

Donc $\boxed{f(x) = \frac{1}{10}\cos(4x) - \frac{\sqrt{3}}{10}\sin(4x)}$

3) $\frac{1}{5}\cos(4x + \pi/3) = \frac{1}{5}\left(\cos 4x \times \cos\frac{\pi}{3} - \sin(4x)\sin\pi/3\right)$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin(4x)\right).$

$= \frac{1}{10}\cos 4x - \frac{\sqrt{3}}{10}\sin(4x)$

$= f(x)$ $\qquad$ cqfd

4) a) $f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5}\cos(4x + \pi/3) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos(4x + \pi/3) = 1.$

$\Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \pi/3 = 0 + 2k\pi \\ 4x + \pi/3 = -0 + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 4x + \pi/3 = 2k\pi \Leftrightarrow 4x = -\pi/3 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\pi/12 + \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}.$

les solutions qui appartiennent à $[0 ; 2\pi]$ sont :

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} \\ -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12} \\ -\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2} = \frac{17\pi}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow S = \left\{ \frac{5\pi}{12} ; \frac{11\pi}{12} ; \frac{17\pi}{12} \right\}$$

Exercice 2

1) $4y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{1}{4}y = 0$ donc les solutions sont de la forme $y = \alpha \cos(\frac{1}{2}x) + \beta \sin(\frac{1}{2}x) = f(x)$

2) a) C_f passe par $A(0;1)$, donc $f(0) = 1$

C_f admet en 0 une tgte de coefficient directeur $= \frac{1}{2}$, donc $f'(0) = \frac{1}{2}$.

b) $f(0) = 1$, donc $\alpha \cos(\frac{1}{2} \times 0) + \beta \sin(\frac{1}{2} \times 0) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$.

$f'(x) = -\frac{\alpha}{2} \sin(\frac{x}{2}) + \frac{\beta}{2} \cos(1/2\, x)$. , donc $f'(0) = \beta/2$.

$f'(0) = 1/2$, donc $\beta/2 = 1/2$, donc $\beta = 1$.

Donc $f(x) = \cos(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2})$.

3) $(f(x))^2 = \left(\cos(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2})\right)^2 = \underbrace{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}_{1} + \underbrace{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}_{\sin(x)}$.

$= 1 + \sin(x)$ cqfd

4) $V = \pi \int_0^{\pi} (f(x))^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (1 + \sin(x))\, dx = \pi \left[x - \cos(x) \right]_0^{\pi}$

$= \pi \left[\pi - \cos(\pi) + \cos(0) \right] = \pi \left[\pi + 1 + 1 \right]$

$= \pi (\pi + 2)$

Exercice 3 $f(x) = 2\sin(2x - \pi/6)$

1) a) Par lecture graphique, on trouve 4 solutions dans $[-2\pi ; 2\pi]$.

b) $f(x) = 2 \iff 2\sin(2x - \pi/6) = 2 \iff \sin(2x - \pi/6) = 1$

$\iff \sin(2x - \pi/6) = \sin(\pi/2) \iff \begin{cases} 2x - \pi/6 = \pi/2 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \pi/6 = (\pi - \pi/2) + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff 2x - \pi/6 = \pi/2 + 2k\pi \iff 2x = \pi/2 + \pi/6 + 2k\pi = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$

$\iff x = \frac{4\pi}{12} + k\pi = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Donc dans $[0, \pi]$, les solutions sont : $\underline{\underline{\pi/3}}$.

2) $y'' + 4y = 0$

a) $y = \alpha\cos 2x + \beta \sin 2x$

b) $g(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ avec $g(0) = -1$ $g'(0) = 2\sqrt{3}$.

$g(0) = -1 \iff \alpha = -1$

$g'(x) = -2\alpha \sin 2x + 2\beta \cos 2x$, donc $g'(0) = 2\beta$.

Donc $2\beta = 2\sqrt{3}$, donc $\beta = \sqrt{3}$.

Donc $\boxed{g(x) = -\cos 2x + \sqrt{3}\sin(2x)}$

c) $f(x) = 2\sin(2x - \pi/6) = 2\left(\cos(2x)\sin(-\pi/6) + \sin(2x) \times \cos(-\pi/6)\right)$

$= 2\left(\cos(2x) \times (-1/2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)\right)$

$= -\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x)$, donc $\boxed{\text{sur } [-2\pi ; 2\pi],\ f(x) = g(x)}$

$= g(x)$