Exercice 5

① a) $I'H = I'O + OH = 1 + \cos(\pi/4) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}$

b) $I'M^2 = I'H^2 + HM^2 = \left[\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]^2 + \sin^2(\pi/4)$

$I'M^2 = \frac{1+2+2\sqrt{2}}{2} + (1/\sqrt{2})^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2}$

$I'M^2 = 2+\sqrt{2}$, donc $\underline{\underline{I'M = \sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ CQFD

② L'angle $MI'I$ est égale à $\pi/8$ $\left(\frac{\pi - \frac{3\pi}{4}}{2}\right)$

et le triangle $I'HM$ est un triangle rectangle en H.

Donc $\cos(\widehat{MI'I}) = \frac{I'H}{I'M} = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

De la même façon $\sin(\widehat{MI'I}) = \frac{MH}{I'M} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

Donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}}$