Demonstration par récurrence

1) Pour $n = 1$

$$A = \sum_1^1 (p_i x_i) \times \sum_1^n (p_i y_i) = p_1 x_1 \times p_1 y_1$$
$$= p_1^2 x_1 y_1$$

$0 < p_1 \leq 1$, donc $p_1^2 < p_1$.

Donc $A = p_1^2 x_1 y_1 \leq p_1 x_1 y_1 = \sum_1^1 (p_i x_i y_i)$

Donc au rang 1, l'inégalité est vraie

2) Supposons que la propriété est vraie au rang n, Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'a.d $\sum_1^{n+1} p_i x_i y_i \geq \left(\sum_1^{n+1} p_i x_i\right)\left(\sum_1^{n+1} p_i y_i\right)$

$$\left(\sum_1^{n+1} p_i x_i\right)\left(\sum_1^{n+1} p_i y_i\right) = \left(\sum_1^{n} p_i x_i + p_{n+1} x_{n+1}\right)\left(\sum_1^{n} p_i y_i + p_{n+1} y_{n+1}\right)$$

$$= \left(\sum_1^{n} p_i x_i\right)\left(\sum_1^{n} p_i y_i\right) + p_{n+1} y_{n+1} \left(\sum_1^{n} p_i x_i\right) + p_{n+1} x_{n+1} \left(\sum_1^{n} p_i y_i\right)$$
$$+ p_{n+1}^2 x_{n+1} y_{n+1}$$

$$\leq \sum_1^{n} p_i x_i y_i + p_{n+1} y_{n+1} \left(\sum_1^{n} p_i x_{n+1}\right) + p_{n+1} x_{n+1} \left(\sum_1^{n} p_i y_{n+1}\right)$$

$$+ p_{n+1}^2 x_{n+1} y_{n+1} \leq \sum_1^{n} p_i x_i y_i + p_{n+1} y_{n+1} x_{n+1} + p_{n+1} x_{n+1} y_{n+1}$$
$$+ p_{n+1}^2 x_{n+1} y_{n+1}$$

$$\leq \sum_1^{n} p_i x_i y_i + 2 p_{n+1} x_{n+1} y_{n+1} + p_{n+1}^2 x_{n+1} y_{n+1}$$

$$\leq \sum_1^{n} p_i x_i y_i + p_{n+1} x_{n+1} y_{n+1}$$

$$= \left(\sum_1^{n+1} p_i x_i y_i\right)$$

CQFD