

Exercice

$\Pi_859433$  contient 258716 chiffres en écriture décimale.

Problème

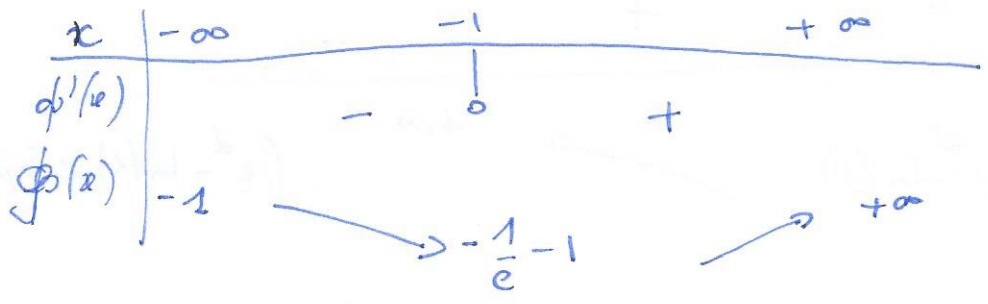
$$\phi(x) = xe^x - 1$$

PARTIE A

1) a)  $\phi$  est une fonction continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\phi'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$x \leq -1$  :  $\phi'(x) \leq 0$  , donc  $\phi$  est décroissante sur  $]-\infty; -1]$   
 $x \geq -1$  :  $\phi'(x) \geq 0$  , donc  $\phi$  est croissante sur  $[-1; +\infty[$ .



b)  $\forall x \in ]-\infty; -1]$ ,  $\phi(x) < 0$

sur  $[-1; +\infty[$ ,  $\phi$  est continue et croissante.

$\phi(-1) < 0$  et  $\phi(+\infty) > 0$  , donc il existe un  $\alpha$  unique  
 $\in [-1; +\infty[$  tel que  $\phi(\alpha) = 0$  (Théorème Bijection Valeurs  
 Intermédiaires).  $0,567 < \alpha < 0,568$

c)  $\forall x \in ]-\infty; \alpha]$ ,  $\phi(x) \leq 0$

$\forall x \in [\alpha; +\infty[$  ,  $\phi(x) \geq 0$

2) a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x - \ln(x) = +\infty$$

$$b) f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (x e^x - 1) = \frac{1}{x} \times \phi(x). \quad (2)$$

$\forall x \in [0; +\infty[$ ,  $x > 0$ , donc sur  $[0; +\infty[$   $f'(x)$  est du signe de  $\phi(x)$ .

$$\text{Or } \forall x \in [0; \alpha], f'(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [\alpha; +\infty[, f'(x) \geq 0.$$

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$e^{\alpha} - \ln(\alpha)$	$+\infty$

$(e^{\alpha} - \ln(\alpha) \approx 2,33)$

### Partie B

1) on sait que  $f(x)$  est continue et croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ , on sait aussi que  $e^{\alpha} - \ln(\alpha) \approx 2,33 < m^{(n>3)} < +\infty$ , donc d'après le théorème de la bijection (TVI), il existe une seule unique  $x_n$  telle que  $f(x_n) = m$ .

$$2) x_{10} \approx 2,4 \quad ; \quad x_{100} \approx 4,6 \quad ; \quad x_{1000} \approx 6,9$$

$$3) \forall n > 3, f(x_n) = m \text{ et } f(x_{n+1}) = n+1$$

$f$  est croissante, donc comme  $n+1 > n$ , alors  $f(x_{n+1}) > f(x_n)$ , alors  $x_{n+1} > x_n$ , donc  $x_n$  est croissante.

$$4) \forall p \geq 3, f(\ln(p)) = e^{\ln(p)} - \ln(\ln(p)) = p - \ln(\ln(p))$$

$p \geq 3$ , donc  $\ln(p) \geq 1$ , donc  $\ln(\ln(p)) > 0$ , donc

$$p - \ln(\ln(p)) \leq p. \text{ Donc } \underline{\underline{f(\ln(p)) \leq p.}}$$

$$f(\ln(p)) \leq p$$

(3)

Donc  $f(x_n) = f(\ln(e^{x_n})) \leq e^{x_n}$

D'autre part  $f(x_n) = n$ , donc  $e^{x_n} \geq n$

Donc  $x_n \geq \ln(n)$

$\ln(n)$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

Donc  $x_n$  tend aussi vers  $+\infty$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$