Exercice

M_{859433} contient 258716 chiffres en écriture décimale.

Problème

$\varphi(x) = xe^{x} - 1$

PARTIE A

1) a) φ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\varphi'(x) = e^{x} + xe^{x} = e^{x}(1+x)$

si $x \leq -1$: $\varphi'(x) \leq 0$, donc φ est décroissante sur $]-\infty ; -1]$

si $x \geq -1$: $\varphi'(x) \geq 0$, donc φ est croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{1}{e}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\forall x \in]-\infty ; -1]$, $\varphi(x) < 0$

sur $[-1 ; +\infty[$, φ est continue et croissante.

$\varphi(-1) < 0$ et $\varphi(+\infty) > 0$, Donc il existe un α unique $\in [-1 ; +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$ (Théorème Bijection Valeurs Intermédiaires).

$0{,}567 < \alpha < 0{,}568$

c) $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$, $\varphi(x) \leq 0$

$\forall x \in [\alpha ; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 0$

2) a) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} e^{x} - \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} e^{x} - \ln(x) = +\infty$

b) $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(xe^x - 1) = \frac{1}{x} \times \phi(x)$.

$\forall x \in [0;+\infty[$, $x \geq 0$, donc sur $[0;+\infty[$ $f'(x)$ est du signe de $\phi(x)$.

Donc $\forall x \in [0;\alpha]$, $f'(x) \leq 0$

$\forall x \in [\alpha;+\infty[$, $f'(x) \geq 0$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^\alpha - \ln(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$(e^\alpha - \ln(\alpha) \simeq 2,33)$

Partie B

1) on sait que $f(x)$ est continue et croissante sur $[\alpha;+\infty[$, on sait aussi que $e^\alpha - \ln(\alpha) \simeq 2,33 < n^{(n \geq 3)} < +\infty$, donc d'après le théorème de la bijection (TVI), il existe une solution unique x_n telle que $f(x_n) = n$

2) $x_{10} \simeq 2,4$; $x_{100} \simeq 4,6$; $x_{1000} \simeq 6,9$

3) $\forall n \geq 3$, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$

f est croissante, donc comme $n+1 > n$, alors $f(x_{n+1}) > f(x_n)$, alors $x_{n+1} > x_n$, donc x_n est croissante.

4) $\forall p \geq 3$, $f(\ln(p)) = e^{\ln(p)} - \ln(\ln(p)) = p - \ln(\ln(p))$

$p \geq 3$, donc $\ln(p) \geq 1$, donc $\ln(\ln(p)) \geq 0$, donc

$p - \ln(\ln(p)) \leq p$. Donc $\underline{f(\ln(p)) \leq p}$.

$f(\ln(p)) \leq p$

Donc $f(x_n) = f(\ln(e^{x_n})) \leq e^{(x_n)}$

D'autre part $f(x_n) = n$, donc $e^{x_n} \geq n$

Donc $x_n \geq \ln(n)$

$\ln(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

Donc $\boxed{x_n \text{ tend aussi vers } +\infty \text{ , quand } n \text{ tend vers } +\infty}$