Calcul du rang de la matrice

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{array}$$

on suppose $a \neq b \neq c \neq d$ 2 à 2

Utilisation de la methode du Pivot de Gauss

$$A \to A' \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} L1 & : L'_1 \\ L2-L1 & : L'_2 \\ L3-L1 & : L'_3 \\ L4-L1 & : L'_4 \end{array}$$

on travaille sur la matrice $B = \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

$$B \to B' \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ (c-a) - \frac{(c-a)}{(b-a)}(b-a) & c^2-a^2 - \frac{(c-a)}{(b-a)}(b^2-a^2) & c^3-a^3 - \frac{(c-a)}{(b-a)}(b^3-a^3) \\ (d-a) - \frac{(d-a)}{(b-a)}(b-a) & d^2-a^2 - \frac{(d-a)}{(b-a)}(b^2-a^2) & d^3-a^3 - \frac{(d-a)}{(b-a)}(b^3-a^3) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - \frac{(b-a)}{(b-a)} L_1 \\ L_3 - \frac{(c-a)}{(b-a)} L_1 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & (c^2-a^2)-(c-a)(a+b) & (c^3-a^3)-(c-a)(b^2+a^2+ab) \\ 0 & (d^2-a^2)-(d-a)(a+b) & (d^3-a^3)-(d-a)(b^2+ab+a^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & (c-a)(c-b) & (c-a)(c^2+ac+b^2+ab) \\ 0 & (d-a)(d-b) & (d-a)(b^2+d^2+ad+ab) \end{pmatrix}$$

(1)

on a deduit que le rang de A est 4 car on ne peut pas aboutir à une matrice nulle.

Calcul du rang de la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \\ 1 & d & d^2 & (d-a)(d-b)(d-c) \end{pmatrix}$ ②

$$C \to C' \begin{pmatrix} 1 & d & d^2 & (d-a)(d-b)(d-c) \\ 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C' \to C'' \begin{pmatrix} (d-a)(d-b)(d-c) & 1 & d & d^2 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

on travaille sur la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$

$$D \to D' \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

on travaille sur la matrice $E = \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix}$

$$E \to E' \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c^2-a^2 - \frac{(c-a)}{(b-a)}(b^2-a^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c^2-a^2-(c-a)(a+b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ 0 & \cancel{ca}\ (c-a)(c-b) \end{pmatrix}$$

Donc rang $C = 4$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow$ A et C sont de même rang, elles sont donc équivalentes.