1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_N = \bigcup\limits_{N}^{+\infty} A_m$

a)

$$B_1 = \bigcup_{1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \cdots \cup$$

$$B_2 = \bigcup_{2}^{\infty} A_n = A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

on remarque donc que $B_2 \subset B_1$

et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_N \subset B_{N-1}$

Donc $C = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} B_N = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap B_\infty$

$$= \underline{\underline{\lim_{n \to +\infty} B_m}}$$

b) $p(C) = p\left(\lim\limits_{n \to +\infty} B_m\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} p(B_m)$

$$= \lim_{n \to +\infty} p\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m\right)$$

~~an~~ la serie de terme général a_n converge, donc cela signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_m = 0$ et que donc comme $0 \leq a_n \leq 1$, la suite a_n est bornée et convergente, elle est donc décroissante.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$
$\underline{\underline{= 0}}$

Donc $\underline{\underline{p(C) = 0}}$

c) $C = \bigcap_{1}^{\infty} B_N = \bigcap_{1}^{\infty} \bigcup_{N}^{\infty} A_k$

Donc $\overline{C} = \bigcup_{1}^{\infty} \bigcap_{N}^{\infty} \overline{A_k}$

Donc $p(\overline{C}) = \lim_{+\infty} p(\cap \overline{A_k})$

$= \prod_{1}^{\infty} p(\overline{A_k})$ } car evenements sont indépendants

$= \prod_{1}^{\infty} (1 - p(A_k))$

$1 - x \leq e^{-x}$, donc $1 - p(A_k) \leq e^{-p(A_k)}$

Donc $p(\overline{C}) \leq \prod_{1}^{\infty} e^{-p(A_k)} = \exp\left(\sum_{1}^{\infty} -p(A_k)\right)$

$\lim_{+\infty} p(A_k) = +\infty$, donc $\lim_{+\infty} \exp(\Sigma - p(A_k)) = 0$

Donc $p(\overline{C}) \leq 0 \Rightarrow p(\overline{C}) = 0$

Donc $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = \underline{\underline{1}}.$