$y' = 2\sqrt{y}$

1) $y' = 2\sqrt{y} > 0$, donc $f' = 2\sqrt{f} > 0$

a) La dérivée de f est positive, donc f est croissante

b) f est croissante et donc continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une valeur α, telle que $f(\alpha) = 0$

c) $f(\alpha) = 0$, donc comme f est croissante $\forall x \leq \alpha$, $f(x) \leq f(\alpha)$

Donc $f(x) \leq 0$, or $f(x) \in \mathbb{R}^+$, donc $f(x) \geq 0$

Donc $\underline{\underline{f(x) = 0}}$

d) f est croissante, donc $\forall x > \alpha$, $f(x) > f(\alpha)$

Donc $f(x) > 0$.

e) $f' = 2\sqrt{f} \Leftrightarrow \dfrac{f'}{\sqrt{f}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{f'}{2\sqrt{f}} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{f} = x + k \Leftrightarrow f = (x + k)^2 + \beta$

$f(\alpha) = 0$ donc $k = -\alpha$ et $\beta = 0$

Donc $f(x) = (x - \alpha)^2$