$\boxed{2}$ $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

En notation cyclique $g \circ f = (1, 6, 4, 3, 5, 2)$

b) $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ (a) $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$

Donc $a+b \in \mathbb{N}$ et $a \times b \in \mathbb{N}$, donc $a+b+a\times b \in \mathbb{N}$

Donc $a * b \in \mathbb{N}$, donc $\mathbb{N}$ est fermée par rapport à $*$

(b) Un semi-groupe est un ensemble muni d'une loi de composition associative

$(a*b)*c = (a*b) + c + (a*b)\times c = a+b+ab+c + (a+b+ab)\times c$

$= a+b+ab+c + ac+cb+abc$

$= a+b+c + ab+ac+cb + abc.$

$a*(b*c) = a + (b*c) + a\times(b*c)$

$= a+(b+c+bc) + a\times(b+c+bc) = a+b+c+bc+ab+ac + abc$

$= a+b+c+ab+ac+cb+abc = (a*b)*c$

Donc la loi $*$ est associative dans $\mathbb{N}$.

De plus, $a*b = a+b+ab = b+a+ba = b*a$

Donc la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{N}$

Donc $(\mathbb{N}, *)$ est un semi-groupe commutatif.

(c) $a*0 = a+0+a\times 0 = a$, donc $(\mathbb{N}, *)$ admet un élément neutre, donc $(\mathbb{N}, *)$ est un monoïde.

d) cherchons si tout élément de $\mathbb{N}$ possède un symétrique dans $(\mathbb{N}, *)$

$\exists b \quad a * b = 0$

$a + b + ab = 0 \Leftrightarrow b(1+a) = -a \Leftrightarrow b = \frac{-a}{1+a}$

si $a = -1$, pas de symétrique
et de plus $b \notin \mathbb{N}^*$.

Donc la symétrie n'est pas respectée dans $(\mathbb{N}, *)$

Donc $(\mathbb{N}, *)$ n'est pas un groupe