a) $\forall a,b \in \mathbb{R}_*^+$, $f(b)-f(a) = b+\frac{1}{b} - a - \frac{1}{a}$

$\Leftrightarrow f(b)-f(a) = \dfrac{ab^2+a-a^2b-b}{ab} = \dfrac{abb-aba+a-b}{ab}$

$= \dfrac{ab(b-a)+a-b}{ab} = \dfrac{(b-a)}{ab}(ab-1)$

b) - si $a \in [1;+\infty[$ et $b \in [1;+\infty[$ avec $a<b$

$ab>1$, donc $ab-1>0$
et $ab>0$
et $b-a>0$

$\left.\begin{matrix} ab-1>0 \\ ab>0 \\ b-a>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(b)-f(a)>0 \Leftrightarrow f(a)<f(b)$

Donc si $a<b$, $f(a)<f(b)$, donc f est croissante sur $[1;+\infty[$

- si $a \in]0;1]$ et $b \in]0;1]$, avec $a<b$

$ab<1$, donc $ab-1<0$

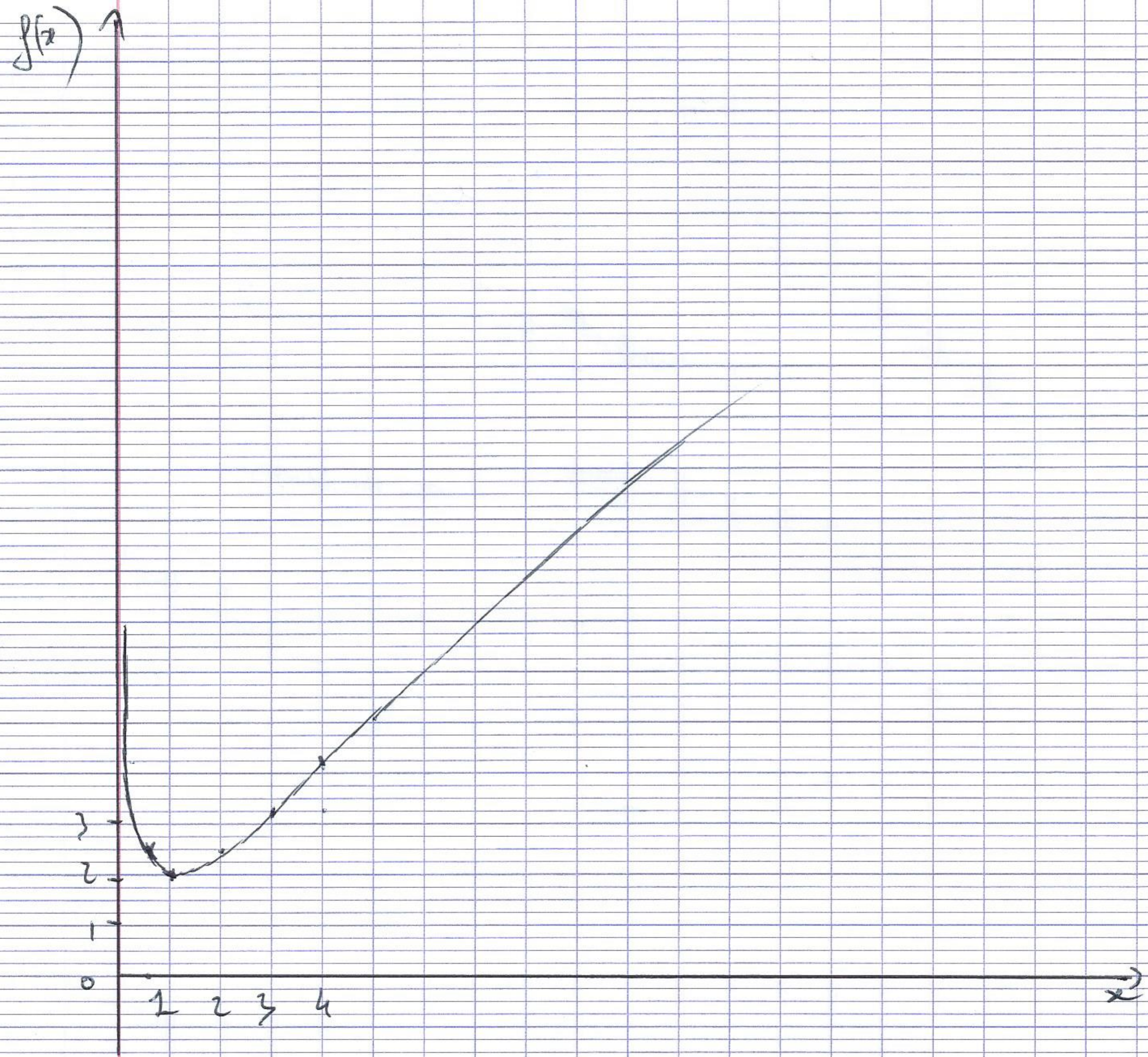
$\left.\begin{matrix} ab-1<0 \\ ab>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(b)-f(a)<0 \Leftrightarrow f(a)>f(b)$

$b-a>0$

Donc si $a<b$, $f(a)>f(b)$, donc f est décroissante sur $]0;1]$

c)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	



2) x et y 2 nombres tels que $x \times y = 1$

$x + y = x + \frac{1}{x} = f(x)$. On a vu dans la question précédente que $f(x)$ est minimale pour $x = 1$

Donc $\boxed{x = 1 \text{ et } y = \frac{1}{1} = 1.}$