(1)

Exercice 3

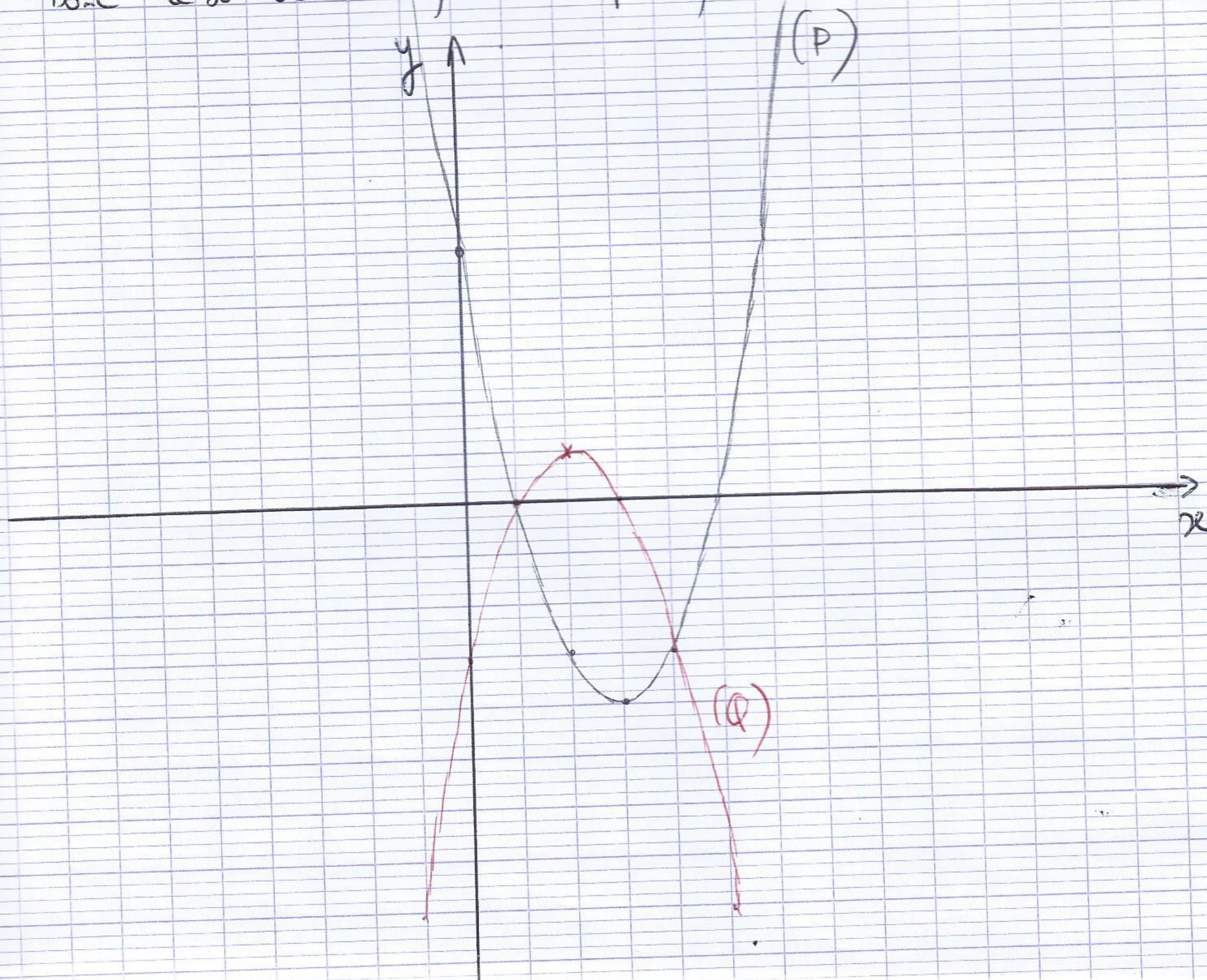
1) La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) atteint son extremum en $-b/2a$.

Donc la parabole P : $y = x^2 - 6x + 5$ atteint son minimum en $x = \frac{6}{2} = 3$ et son minimum vaut $3^2 - 6 \times 3 + 5 = \underline{\underline{-4}}$.

Donc le sommet de la parabole P a pour coordonnées $(3 ; -4)$

La Parabole Q : $y = -x^2 + 4x - 3$ atteint son maximum en $x = \frac{-4}{-2} = 2$ et son maximum vaut $-2^2 + 4 \times 2 - 3 = \underline{1}$.

Donc le sommet de la parabole Q a pour coordonnées $(2 ; 1)$.



① $x^2-6x+5 \geq 0$ $S =]-\infty ; 1] \cup [5 ; +\infty[$ ②

$-x^2+4x-3 \geq 0$ $S = [1 ; 3]$

③ $M (x_M ; y_M) \in (P) \cap (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = x_M^2 - 6x_M + 5 \\ y_M = -x_M^2 + 4x_M - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = x_M^2 - 6x_M + 5 \\ x_M^2 - 6x_M + 5 = -x_M^2 + 4x_M - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = x_M^2 - 6x_M + 5 \\ 2x_M^2 - 10x_M + 8 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = x_M^2 - 6x_M + 5 \\ x_M^2 - 5x_M + 4 = 0 \quad (E) \end{cases}$

on calcule Δ pour (E)

$\Delta = 25 - 4 \times 4 = 9$

Donc $x_M = \frac{5+3}{2} = 4$ ou $x_M = \frac{5-3}{2} = 1$

si $x_M = 4$, $y_M = 4^2 - 6 \times 4 + 5 = -3$

si $x_M = 1$, $y_M = 1^2 - 6 \times 1 + 5 = 0$

Donc $\boxed{A(4 ; -3) \text{ et } B(1 ; 0).}$

④ on pose $f(x) = x^2 - 6x + 5$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ et $h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x^2 - 5x + 4) = 2(x-4)(x-1)$

$h(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty ; 1] \cup [4 ; +\infty[$, donc $f(x) \geq g(x)$ sur cet intervalle

$h(x) \leq 0$ si $x \in [1 ; 4]$, donc $f(x) \leq g(x)$ sur cet intervalle

Donc sur $]-\infty ; 1] \cup [4 ; +\infty[$, (P) est au DESSUS de (Q)

sur $[1 ; 4]$, (P) est au DESSOUS de (Q)