① La tangente en 1 (au point A) passe par le point A et le point de coordonnées $E(-5\,;-2)$. Le nombre dérivé est égal au coefficient directeur de la tgte en A, c'est-à-dire $\frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{-2-3}{-5-1} = \frac{5}{6}$

Donc $f'(1) = 5/6$

La tangente en 0 passe par le point B et par le point $F(-4\,;-3)$

Donc $f'(0) = \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \frac{-3-2}{-4-0} = \frac{5}{4}$

② $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(1+h)+4} - \sqrt{5\times 1+4}}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{5h+9} - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(\sqrt{5h+9} - 3)(\sqrt{5h+9} + 3)}{h(\sqrt{5h+9} + 3)}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5h+9-9}{h(\sqrt{5h+9} + 3)} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{5h}{h(\sqrt{5h+9} + 3)}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5}{(\sqrt{5h+9} + 3)} = \frac{5}{\sqrt{9}+3} = \frac{5}{3+3} = 5/6$

③ $\forall a \in \left]-4/5\,; +\infty\right[$, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(\sqrt{5a+5h+4} - \sqrt{5a+4})}{h}$ $= \cancel{\lim\limits_{h \to 0} (\sqrt{5a+5h+4} - \sqrt{5a+4})(\sqrt{5a+4}}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(\sqrt{5a+5h+4} - \sqrt{5a+4})(\sqrt{5a+5h+4} + \sqrt{5a+4})}{h(\sqrt{5a+5h+4} + \sqrt{5a+4})}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5a+5h+4-5a-4}{h(\sqrt{5a+5h+4} + \sqrt{5a+4})} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{5h}{h(\sqrt{5a+5h+4} + \sqrt{5a+4})}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5}{(\sqrt{5a+5h+4} + \sqrt{5a+4})} = \frac{5}{2\sqrt{5a+4}}$