Exercice 1

1) $\vec{DG} \cdot \vec{EB} = (\vec{DA} + \vec{AG}) \cdot (\vec{EA} + \vec{AB}) = \vec{DA} \cdot \vec{EA} + \vec{DA} \cdot \vec{AB} + \vec{AG} \cdot \vec{EA} + \vec{AG} \cdot \vec{AB}$

$= \|\vec{DA}\| \times \|\vec{EA}\| \times \cos(\widehat{\vec{DA}; \vec{EA}}) + 0 + 0 + \|\vec{AG}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos(\widehat{\vec{AG}; \vec{AB}})$

$= 15 \times 3 \times \cos \pi \quad + \quad 15 \times 3 \times \cos 0 \quad = -45 + 45 = \underline{\underline{0}}$

Donc les vecteurs $\vec{DG}$ et $\vec{EB}$ sont <u>orthogonaux</u>.

2) on choisit le repère $R = (A, \vec{AG}, \vec{AE})$.

Ecrivons les coordonnées des points dans le repère R.

$\vec{AA} = \vec{0}$ donc $A(0;0)$

$\vec{AB} = \frac{5}{3}\vec{AG} = \frac{5}{3}\vec{AG} + 0\vec{AE}$, donc $B(5/3;0)$

$\vec{AD} = -\frac{5}{3}\vec{AE} = 0\vec{AG} + -5/3\,\vec{AE}$, donc $D(0;-5/3)$

$\vec{AE} = 0\vec{AG} + 1\vec{AE}$ donc $E(0;1)$

$\vec{AG} = 1\vec{AG} + 0\vec{AE}$ donc $G(1;0)$

Donc $\vec{DG} = \begin{pmatrix} 1-0 ; 0+5/3 \end{pmatrix} = (1; 5/3)$

et $\vec{EB} = (5/3 ; -1)$

Donc $\vec{DG} \cdot \vec{EB} = (1 \times 5/3) + (5/3 \times -1) = 5/3 - 5/3 = \underline{\underline{0}}$ CQFD

3 Reprenons le repère $R = (A, \vec{AG}, \vec{AE})$

Dans R, $B(5/3 ; 0)$ $E(0 ; 1)$ $D(0 ; -5/3)$

Trouvons les équations des droites (DB), (DE) et (BE).

(DB) : $y = ax + b$ avec $a = \frac{+5/3}{5/3} = 1$ $\Rightarrow y = x + b$

$B \in (DB)$, donc $0 = 5/3 + b$ $\Rightarrow b = -5/3$

donc $(DB) : y = x - 5/3$

(DE) : ~~abscisse~~ E et D ont la même abscisse, donc

$(DE) : x = 0$

(BE) : $y = ax + b$ avec $a = \frac{1}{-5/3} = -3/5$ $\Rightarrow y = \frac{-3}{5}x + b$

$E \in (BE)$, donc $1 = b$

Donc $(BE) : y = -3/5\, x + 1$

Déterminons maintenant les équations des 3 hauteurs du triangle DBE

(h_1) : Hauteur issue de E $\perp$ (BD)

Son coefficient directeur a est tel que $a \times 1 = -1$ $\Rightarrow a = -1$.

$y = -x + b$

$E \in (h_1)$, donc $1 = b$ $\Rightarrow$ $(h_1) : \underline{\underline{y = -x + 1}}$

(h_2) : Hauteur issue de D $\perp$ (BE)

Son coefficient directeur a est tel que $a \times (-3/5) = -1$ $\Rightarrow a = 5/3$

$y = 5/3\, x + b$

$D \in (h_2)$, donc $-5/3 = 0 + b$ $\Rightarrow b = -5/3$

$\Rightarrow (h_2) : \underline{\underline{y = 5/3\, x - 5/3}}$

(h_3) : hauteur issue de B $\perp$ (DE)

(DE) : $x = 0$, donc (h_3) : $y = 0$.

L'intersection des 3 hauteurs d'un triangle est l'orthocentre de ce triangle.

Donc $H \in (h_1) \cap (h_2) \cap (h_3)$

Donc $\begin{cases} y_H = -x_H + 1 \\ y_H = 5/3\, x_H - 5/3 \\ y_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 0 \end{cases}$

on remarque que H a les mêmes coordonnées que G (voir 2))

Donc $G \equiv H$, donc G est bien l'orthocentre du triangle DBE