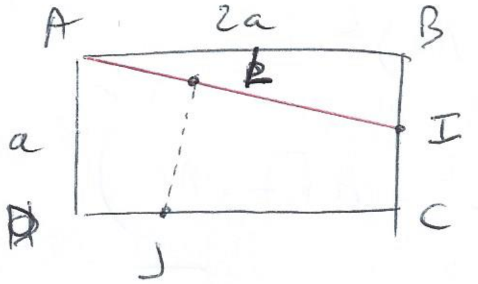

1) ABI est un triangle rectangle en B, donc $AI^2 = AB^2 + BI^2$

Donc $AI^2 = (2a)^2 + (a/2)^2 = 4a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{17a^2}{4}$

Donc $AI = \frac{\sqrt{17}}{2}a$

ADJ est un triangle rectangle en D, donc $AJ^2 = AD^2 + DJ^2$

Donc $AJ^2 = a^2 + \left(\frac{1}{3} \times 2a\right)^2 = a^2 + \frac{4}{9}a^2 = \frac{13}{9}a^2$

Donc $AJ = \frac{\sqrt{13}}{3}a$

2) $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = (\vec{AB} + \vec{BI}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DJ}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{DJ} + \vec{BI} \cdot \vec{AD} + \vec{BI} \cdot \vec{DJ}$

$= 0 + \vec{AB} \cdot \vec{DJ} + \vec{BI} \cdot \vec{AD} + 0$

$= \|\vec{AB}\| \|\vec{DJ}\| \cos(\vec{AB}; \vec{DJ}) + \|\vec{BI}\| \|\vec{AD}\| \cos(\vec{BI}, \vec{AD})$

$= \left(2a \times \frac{2a}{3} \times 1\right) + (a/2 \times a \times 1) = \frac{4a^2}{3} + \frac{a^2}{2} = \frac{11a^2}{6}$

3) le triangle ALJ est rectangle en L, donc $LJ^2 = \cancel{AL^2}\ AJ^2 - AL^2$

le triangle LIJ est rectangle en L, donc $LJ^2 = IJ^2 - (LI)^2$

Donc $AJ^2 - AL^2 = IJ^2 - (LI)^2 = IJ^2 - (AI - AL)^2$ (1)

$AJ^2 = \frac{13}{9}a^2$ $\qquad IJ^2 = JC^2 + CI^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2 + (a/2)^2 = 16/9\, a^2 + \frac{a^2}{4}$

$= \frac{73a^2}{36}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{13}{9}a^2 - (AL)^2 = \frac{73a^2}{36} - \left(\frac{\sqrt{17}}{2}a - AL\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{9}a^2 - (AL)^2 = \frac{73a^2}{36} - \left(\frac{17}{4}a^2 + AL^2 - a\sqrt{17} \times AL\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{9}a^2 - (AL)^2 = \frac{73a^2}{36} - \frac{17}{4}a^2 - AL^2 + a \times AL \times \sqrt{17}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{17} \times AL = \frac{13}{9}a^2 - \frac{73a^2}{36} + \frac{17}{4}a^2 = \frac{(52 - 73 + 153)\,a^2}{36}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{17} \times AL = \frac{132}{36}a^2 = \frac{66}{18}a^2 = \frac{33}{9}a^2 = \frac{11}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow AL = \frac{11a}{3\sqrt{17}}$$

4) $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{11a^2}{6}$ (d'après la question 2)

on sait aussi que $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \|\vec{AI}\| \, \|\vec{AJ}\| \cos(\widehat{\vec{AI}; \vec{AJ}})$

Donc $\frac{11a^2}{6} = \frac{\sqrt{17}}{2}a \times \frac{\sqrt{13}}{3}a \times \cos(\widehat{\vec{AI}, \vec{AJ}})$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{AI}; \vec{AJ}}) = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{13}} \simeq 0{,}73994$$

Donc $(\widehat{\vec{AI}, \vec{AJ}}) = \text{Arccos}(0{,}73994) \simeq 42{,}3°$