① Etudions les variations de la fonction $f(x) = x + \frac{5}{x}$ ①

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, f est dérivable

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 - \frac{5}{x^2}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{5}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \geq 5$

$\Rightarrow x \geq \sqrt{5}$ ou $x \leq -\sqrt{5}$

Donc f est croissante sur $[\sqrt{5} ; +\infty[$ $\sqrt{5} \simeq 2,24$.

Donc la suite u_n est croissante sur $[3 ; +\infty[$

② D'après le Théorème de Pythagore

$C_1^2 = (10-1)^2 + 1^2 = 9^2 + 1^2 = 82 \Rightarrow C_1 = \sqrt{82}$

$C_{n+1}^2 = (C_n - 1)^2 + 1^2 = \underline{\underline{C_n^2 - 2C_n + 2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1}^2 = (C_n - 1)^2 + 1^2 \Rightarrow C_{n+1} = \sqrt{(C_n-1)^2 + 1}$

$(C_n - 1)^2 \geq 0$, donc $C_{n+1}^2 \geq 1 \Rightarrow \underline{\underline{C_{n+1} \geq 1.}}$

Donc 1 est un minorant de la suite.

D'après la solution géométrique, la suite C_n est décroissante.

$$C_{n+1} - C_n = \sqrt{(C_n-1)^2 + 1} - C_n$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(C_n-1)^2+1} - C_n\right)\left(\sqrt{(C_n-1)^2+1} + C_n\right)}{\sqrt{(C_n-1)^2+1} + C_n}$$

$$C_{n+1} - C_n = \frac{(C_n - 1)^2 + 1 - C_n^2}{\sqrt{(C_n-1)^2+1} + C_n}$$

$$= \frac{\cancel{C_n^2} - 2C_n + 1 + 1 - \cancel{C_n^2}}{\sqrt{(C_n-1)^2+1} + C_n}$$

$$= \frac{2 - 2C_n}{\sqrt{(C_n-1)^2+1} + C_n}$$

$C_n \geq 1$, donc $2 - 2C_n \leq 0$

et $\sqrt{(C_n-1)^2+1} + C_n \geq 0$

Donc $\dfrac{2-2C_n}{\sqrt{(C_n-1)^2+1} + C_n} \leq 0$

Donc $C_{n+1} - C_n \leq 0$

Donc la suite C_n est décroissante