$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ $\qquad$ (1)

1) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(2x^3 + x^2 - 1)$

Donc $f'(x) = \frac{1}{x^2} + g(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$x^2 > 0$, donc $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

2) $\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x+1)$

si $x > 0$, $2x > 0$ et $3x + 1 > 0$, donc $g'(x) > 0$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$g(0) = -1$ et $g(1) = 2$, donc d'après le corollaire du Theorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\alpha \in]0,1[$ unique tel que $g(\alpha) = 0$.

Donc si $0 < x \leq a$, $g(x) \leq 0$

et si $x \geq a$, $g(x) \geq 0$

3)

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	

4) La Tangente au point A d'abscisse 1 a pour équation :

a) $y = f(1) + f'(1)(x-1)$.

$f(1) = 1^2 + 1 + \frac{1}{1} = 3 \qquad f'(1) = 2$

Donc $y = 3 + 2(x-1) = 2x + 1$

$\boxed{T(1) : y = 2x+1}$ on pose $h(x) = 2x+1$

b) Etudions le signe de $f(x) - h(x)$.

$f(x) - h(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} - 2x - 1 = x^2 - x + \frac{1}{x} - 1$

$= \frac{1}{x}\left(x^3 - x^2 + 1 - x\right)$

$= \frac{1}{x}\left(x^2(x-1) - (x-1)\right) = \frac{1}{x} \times (x-1)\left[x^2 - 1\right]$

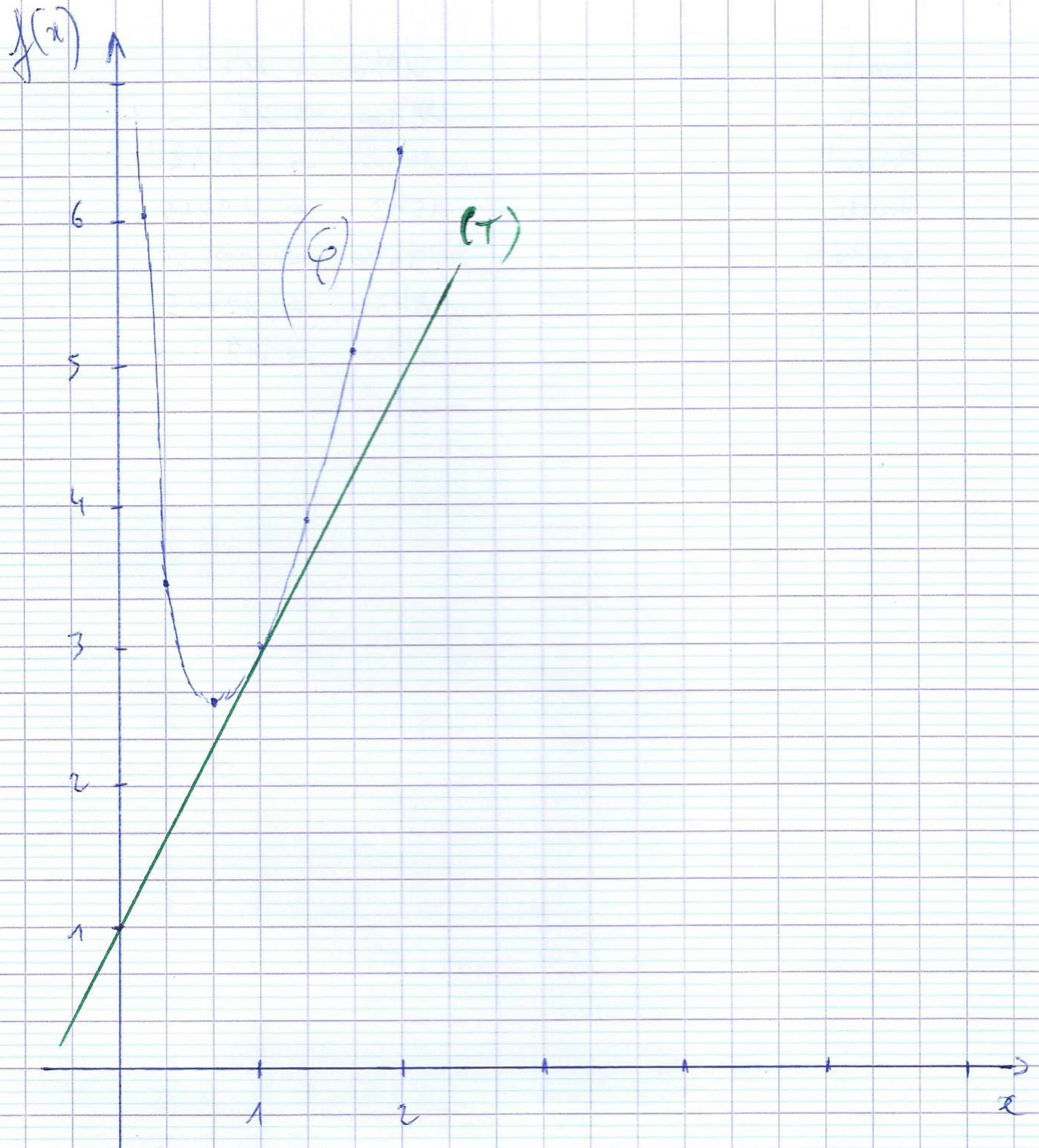
$= \frac{1}{x} \times (x-1) \times (x-1) \times (x+1) = \frac{(x-1)^2}{x} \times (x+1)$

sur $]0 ; +\infty[$ $\quad x+1 > 0, \quad x > 0 \quad$ et $(x-1)^2 > 0$

Donc $f(x) - h(x) > 0$, donc $f(x) > h(x)$, donc

la courbe $\mathcal{C}$ est au DESSUS de la tangente (T).

5)



$f(x)$
6
5
4
3
2
1
1
2
x
(φ)
(T)