Exercice 2

1

$OA = 10 \qquad (\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = \frac{\pi}{3}$

1 a) $\alpha_n = (\vec{OA_0}, \vec{OA_n})$

$\alpha_{n+1} = (\vec{OA_0}, \vec{OA_{n+1}}) = (\vec{OA_0}, \vec{OA_n}) + (\vec{OA_n}, \vec{OA_{n+1}}) = \alpha_n + \frac{\pi}{3}$

α_n est donc une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison $\pi/3$.

$$\boxed{\alpha_n = \frac{\pi n}{3}}$$

b) $\alpha_6 = \frac{\pi \times 6}{3} = 2\pi$

le point A_6 appartient à la droite (OA).

les points qui sont situés sur la droite $[OA_6]$, sont les points A_{12}, A_{18} ...

A_{6k} avec $k \geq 1$.

2 $d_n = OA_n$

a) $d_0 = OA_0 = 10$

$d_1 = OA_1 = OA \times \cos \pi/3 = 1/2\ OA = 5$

$d_2 = OA_2 = \cos \pi/3 \times OA_1 = 5/2 = 2,5$

$d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n$, d_n est donc une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme 10.

$$\boxed{d_n = 10 \times (1/2)^n}$$

b) $d_{n_0} < 0,1 \iff 10 \times (1/2)^{n_0} < 0,1 \iff (1/2)^{n_0} < 0,01$

Avec la calculatrice, on trouve $\underline{n_0 = 7}$

c) $S_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ = Somme des Termes de la suite géométrique $10 \times (1/2)^n$

Donc $S_n = 10 \times \left(\dfrac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \right) = \underline{\underline{20\left(1-(1/2)^{n+1}\right)}}$

d) $(A_nA_{n+1})^2 = (OA_n)^2 - (OA_{n+1})^2$

$\Leftrightarrow (A_nA_{n+1})^2 = (OA_n)^2 - \dfrac{1}{4}(OA_n)^2 = \dfrac{3}{4}(OA_n)^2$

$\Rightarrow \boxed{A_nA_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, OA_n.}$

e) $A_nA_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} d_n$

Donc $L_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2} S_n = \dfrac{20\sqrt{3}}{2}\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 10\sqrt{3}\left(1-(1/2)^{n+1}\right].$

$\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \underline{\underline{10\sqrt{3}}}$ (car $(1/2)^n$ tend vers 0).