Exercice 3

a) $\forall x \in]0;1[,\ f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

$f(x)$ est la somme des termes de la suite géométrique $u_n = x^n$.

Donc $\boxed{f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}}$

b) $f(x)$ est un polynôme de degré n, donc f est dérivable sur $]0;1[$.

$\forall x \in]0;1[,\ f'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$ (1)

et

$\forall x \in]0;1[,\ f'(x) = \left(\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

$$= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \quad (2)$$

c) (1) et (2) $\Leftrightarrow$ $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$

$$\Rightarrow x(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}) = x\left(\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = x\left(\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}\right)$$ CQFD

③

a) $p(X=1)=1/2$

$p(X=2) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$

$p(X=3) = 1/8$

$p(X=4) = 1/16$

$p(X=5) = 1/32$

$p(X=0) = 1/32$

$\Rightarrow$

X	0	1	2	3	4	5
p(X)	1/32	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32

$$E(X) = \frac{1}{32}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 + 4\times\frac{1}{16} + 5\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} = \underline{\underline{\frac{57}{32}}}$$

Donc pour que le jeu soit equitable, la mise de départ doit être de $\frac{57}{32} \simeq 1{,}78$ €.

b) $p(X=1)=1/2$ $\quad p(X=2)=1/4 \quad p(X=k) = \frac{1}{2^k}$ si $k \neq 0$

$p(X=0) = \frac{1}{2^n}$

$$E(X) = \sum_{0}^{n} p(X=k)\times k = \sum_{1}^{n} k\times p(X=k)$$

$$= \sum_{1}^{n} k\times\frac{1}{2^k} = \sum_{1}^{n} k\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1-(n+1)(1/2)^n + n(1/2)^{n+1}}{(1-1/2)^2}\right)$$ d'après le ① c)

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1-(n+2)(1/2)^{n+1}}{1/4}\right) = \underline{\underline{2\left(1-(n+2)(1/2)^{n+1}\right)}}$$ CQFD

c) quand n devient grand u_n tend vers $\underline{\underline{2}}$

d) Si le nombre de parties n'est pas limité, la mise devra être de 2 euros pour que le jeu soit équitable.